RELATÓRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

BOLSA FAPESP — PROCESSO **06/06983–2**

INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DINÂMICOS CAÓTICOS

Artur Gower

Bolsista

Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

Orientador

Janeiro 2007 — Março 2008

1 Resumo do Plano Inicial

2 Introdução

Nos últimos quarenta anos cientistas de várias áreas vêem analisando sistemas determinísticos cujo comportamento as vezes parece aleatório. O nome "sistemas caóticos" foi proposto para agrupar vagamente esses sistemas. A partir disso cientistas de todas as áreas tentaram resumir numa definição formal características essenciais desses sistemas. O resultado disso é que existem várias definições que não são equivalentes.

Muitas razões contribuíam para tal, uma deles certamente foi que comportamento caótico é de grande interesse para várias disciplinas. E é difícil encontrar critérios que abranja as necessidade e padrões de todas as disciplinas. Por exemplo, um cientista experimental favorecerá uma definição que seja fácil testar e estará menos preocupado com as exceções, enquanto que um matemático desejará alcançar uma forma de caracterizar únicamente o comportamento caótico, e não sentirá a urgência de prover uma definição que pode ser facilmente verificada por meios de técnicas numéricas ou experimentais.

Os principais objetivos deste relatório são,

- Esclarecer as características essênciais de sistemas caóticos.
- Analisar as diferenças entre as definições que são encontrados com mais frequência na literatura. E ,de certa forma, suas vantagems e falhas.

A respeito do parecer do ultimo relatório: agradecemos a observação, foi adicionado um paragrafo, depois do primeiro exemplo na sessão: "Definição de Li-Yorke", explicando como construir o conjunto de cantor invariante em relação a dinâmica de alguns exemplos da família quadrática. Também desejamos que seja notado; que apesar da falta de detalhes em muitas sessões do relatório o estudo dos conceitos mencionados foi detalhado. Frequentemente, os assunto mais elaborados contenham elementos originais do autor. E detalhes, as vezes, são omitidos quando o assunto é perfeitamente explicado pela literatura.

3 Definições Preliminares

Daqui em diante f será uma função contínua e, $f : D \to I\!R^q$ e $D \subset I\!R^q$. O sistema dinâmico discreto definido por f será da forma,

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Nos relatórios anteriores trabalhamos somente na reta real $I\!R$; mudamos agora para $I\!R^q$ por que a maioria das definições são válidas em $I\!R^q$ e exemplos interessantes e ilustrativos surgem em $I\!R^2$.

Definição 1 *$X \subset D$ é dito invariante em relação a ação de f se $f(X) \subset X$.*

No caso em que $f(X)$ for limitada iremos assumir que o fecho de X está contido no domínio de f. Desta forma se X for invariante em relação a f resulta da continuidade de f que o fecho de X também será invariante. Daqui para frente todos os conjuntos !! invariantes que iremos analisar serão fechados e limitados.

Definição 2 *A órbita $O(x_0)$ é assintoticamente periódica se existe uma órbita periódica $O(y_0)$ de forma que,*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Definição 3 *y é ponto limite da órbita de x_0, $O(x_0)$, se uma subseqüência de $O(x_0)$ convergir para y. O conjunto dos pontos limites de $O(x_0)$ serão denotados por $L(x_0)$.*

Sendo f contínua e $X \subset D$, pode-se demonstrar que $L(x_0)$ é fechado, limitado e satisfaz a importante igualdade,

$$f(L(x_0)) = L(x_0).$$

O conjunto $L(x_0)$ é finito se e somente se $O(x_0)$ for assintoticamente periódica.Devido a continuidade de f, se $O(x_0)$ não for limitada então $L(x_0)$ será vazia. Quando $L(x_0)$ não for limitada dizemos que $O(x_0)$ é aperiódica.

Definição 4 *$O(x_0)$ é dito instável se existe $r(x_0) > 0$ tal que para todo $d > 0$ podemos encontrar $y_0 \in D$ e $n \in I\!N$ de forma que $\|x_0 - y_0\| < d$ e $\|x_n - y_n\| > r(x_0)$. Uma órbita que não é instável é dita estável.*

Quando $O(x_0)$ está contida num conjunto invariante $X \subset D$, dizemos que $O(x_0)$ é instável em relação a X se $y_0 \in X$. É claro que neste caso X terá um número infinito de pontos.

Definição 5 *Seja $X \subset D$, f tem em X* dependência sensível às condições iniciais *se para todo $x_0 \in X$, existir $r_0 > 0$ tal que para todo $d > 0$ podemos encontrar y_0 que pertence ao domínio de f e $n \geq 1$ de forma que $\|x_0 - y_0\| \leq d$ e $\|x_n - y_n\| \geq r_0$.*

Portanto, se f tem em X dependência sensível às condições iniciais então para todo $x_0 \in X$, $O(x_0)$ é instável com a mesma constante r_0. Quando X é um conjunto invariante e é possível sempre encontrar $y_0 \in X$, então dizemos que f tem em X dependência sensível às condições iniciais *em relação a X*.

Definição 6 *Um conjunto $A \subset X \subset I\!R^q$ é chamado* aberto em X *se $A = X \cap U$ e U é um conjunto aberto em $I\!R^q$.*

Definição 7 *A função f apresenta* transitividade topológica *em um conjunto invariante X se para todo par de conjuntos $A, B \subset X$ abertos em X, existe um natural $k > 0$ tal que $f^k(A) \cap B \neq \emptyset$.*

Antes de apresentar as várias definições de caos, iremos ilustrar o consenso que há nas definições mais rigorosas. Muitas vêzes nomeia-se caótico um sistema onde os erros são "incontroláveis". Como o famoso exemplo que é possível que as batidas das asas de uma borboleta poderiam causar um furacão no outro lado do mundo, também seria correto dizer que poderia resultar em um dia de sol.

Três das cinco definições que analisaremos irão incorporar duas características fundamentais:

- independentemente da precisão das medidas não podemos prever o futuro do sistema.
- depois de um determinado tempo o sistema poderá ocupar qualquer estado dentro do conjunto onde dizemos que há um comportamento caótico.

4 As Diferentes Formas do Caos

4.1 Definição de Li-Yorke

Seja $I \subset I\!R$ e $f : I \to I$ um função contínua. Assuma que existe uma órbita de período três sobe a ação de f. Em um artigo bem conhecido de Li e Yorke [6] foi demonstrado que:

(1) Sobe a ação de f existem órbitas de todos os períodos;

(2) Existe um conjunto não enumerável $S \subset I$ tal que $O(x)$, $x \in S$, é aperiódica e instável.

Uma falta de clareza desta definição é se é considerado que f é caótica em todo o intervalo I, ou somente no fecho de S. Para ilustrar bem a importância disso, lembrando da função discutida no relatório anterior, $f(x) = 4x(1-x)$, havia, no domínio $I = [0,1]$ uma órbita com período três. Todas as órbitas no domínio são instáveis, algumas acabam indo em direção a menos infinito, outros vagam no domínio por um número de iterações indeterminado. Portanto, apesar de todos as órbitas serem instáveis, o destino de uma grande parcela destas, o infinito negativo, é conhecido. Usando este exemplo como dica construímos um outro:

Exemplo 1 Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 0.25 \, , \\ 4x - 1 & , 0.25 \leq x < 0.5 \, , \\ -4x + 3 & , 0.5 \leq x < 0.75 \, , \\ 0 & , 0.75 \leq x < 1.0 \, . \end{cases}$$

É fácil verificar que $O(23/65)$ é uma órbita de período 3 e para todo $x \in [0.25, 1/3] = I_1$ ou $x \in [2/3, 0.75] = I_2$ existe $m \in I\!N$ tal que $f^m(x) = 0$. Alem disso se $x \in [1.75/4, 2.25/4] = J$ então $f(x) \geq 0.75$, portanto $f^2(x) = 0$. Se $x \notin I_1 \cup I_2 \cup J$ então $f(x) \neq 0$. Vamos procurar um conjunto $S \in [0.25, 0.75]$ tal que para todo $x \in S$ não existe $m \in I\!N$ de forma que $f^m(x) = 0$, ou seja o destino de $O(x)$ é incerto, talvez caótico? Dado este criterio S será invariante em relação a ação de f. Para tanto, note que a imagem inversa de $I_1 \cup I_2$ esta contida em $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ onde $I_3 = [5/12, 1.75/4] \cup J \cup [2.25/4, 7/12]$. Veja a Figura 1 abaixo na qual os intervalos I_1, I_2 e I_3 estão demarcados.

Figura 1: f do Exemplo 1

O comprimento do intervalo $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ é $1/3$. Iremos identificar a imagem inversa de I_3 e seu comprimento, o qual chamaremos de I_{31} quando for a esquerda de I_3, e I_{32} quando estiver a direita. Depois, faremos o mesmo com I_{31} e I_{32} e, assim, subseqüentemente. É fácil calcular que $I_{31} = [17/48, 19/48]$, $I_{32} = [29/48, 31/48]$ e o comprimento de $I_4 = I_{31} \cup I_{32}$ é $1/12$. E a intersecção dois a dois destes intervalos, e os intervalos a serem calculados, é vazio. Procedendo desta forma temos que o comprimento desta família de intervalos disjuntos é $1/6 + 1/6 + 1/12 + 1/24 + \cdots = 1/6(1 + 1 + 1/2 + 1/4 + \cdots) = 1/6 + 1/3 = 1/2$. Para todo x que pertence a um destes intervalos existe $m \in I\!N$ tal que $f^m(x) = 0$. Logo, S de certa forma é desprezível. Ou seja, se escolhemos um ponto de forma aleatória entre $[0, 1]$ a órbita deste ponto iria convergir para 0.

Seria estranho afirmar que em $[0.25, 0.75]$ f atua de uma forma caótica, já que o sistema é bastante previsível. Este exemplo mostra que é necessário indicar onde f é considerada caótica.

Uma das vantagens desta definição é que pode se verificar facilmente, por análise do gráfico, se há uma órbita com período três.

Uma observação: A forma que os intervalos I_i foram encontrados é semelhante a construção do conjunto de cantor invariante que aparece em exemplos da família quadrática, $f(x) = \mu x(1 - x)$, quando $\mu > 4$, onde o domínio da função é $D = [0, 1]$. Nestes casos existe um intervalo aberto A_1, centrado em $1/2$, tal que se $x \in A_1$ então $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$.

Todos os outros pontos em D são mapeados dentro de $[0,1]$. $D - A_1$ consiste de dois intervalos fechados, J_0 a esquerda de A_1 e J_1 a direita. Note que f mapeia J_0 e J_1 de forma monotono em D. Sendo que $f(J_0) = f(J_1) = D$, então existe um par de intervalos abertos, um contido em J_0 e o outro contido em J_1, cujo imagem de cada um desses intervalos é o próprio A_1. Chamamos esse par de intervalos abertos de A_2. Logo a imagem inversa de A_2, o qual denominaremos A_3, consiste de 4 intervalos abertos disjuntos. Continuando dessa maneira notamos que A_n consiste em 2^{n-1} intervalos abertos e disjuntos. Portanto $D - A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ consiste de $2^n - 1$ intervalos fechados. Logo é claro que o limite deste processo não produz um conjunto vazio. Na verdade, a construção deste conjunto invariante é muito semelhante a construção do conjunto de Cantor que é obtido por remoções sucessivas de conjuntos abertos do meio de conjuntos fechados.

4.2 Wiggins

De acordo com Wiggins [3] um mapeamento $f : X \to X, X \subset \mathbb{R}^q$, é caótico se:

(1) f apresenta transitividade topológica em X;

(2) f tem uma dependência sensível as. condições iniciais.

Agora iremos demonstrar que a transitividade topológica é equivalente a existência de uma órbita que passa tão perto quanto se queira de qualquer outro ponto em X. Para tanto vamos precisar do seguinte resultado,

Teorema 1 *Seja $X \subset \mathbb{R}^q$ e $f : X \to X$ contínua fechada e limitada com transitividade topológica. Para toda família finita de conjuntos abertos $\{A_i\}_{i=0}^n$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $A_i \cap X \neq \emptyset$, existe um conjunto E aberto em X tal que para todo A_i existe $l_i \in N$ onde $f^{l_i}(E) \subset A_i$.*

Prova : Nomeando $A = A_0 \cap X$ e $B = A_1 \cap X$, usando a transitividade topológica sabemos que existe $l_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{l_1}(A) \cap B \neq \emptyset$, ou seja, existe $y_1 \in A$ tal que $f^{l_1}(y_1) \in B$. Como A e B são abertos em X, existe uma bola aberta $\mathcal{B}_{y_1} \subset B$, centrada em $f^{l_1}(y_1)$, e sendo f contínua então $f^{-l_1}(\mathcal{B}_{y_1})$ [1] é aberto em X e $E_1 = A \cap f^{-l_1}(\mathcal{B}_{y_1})$

[1] Definimos $f^{-k}(C) = \{x \in X | f^k(x) \in C\}$

também o será. Assim, f^{l_1} mapeia todos os pontos de E_1 em A_1. Agora identificaremos $E_2 \subset E_1$ de forma que para algum $l_2 \in I\!N$, $f^{l_2} \subset A_2$. De novo, nomeando $A = E_1 \cap X = E_1$ e $B = A_2 \cap X$ sabemos que existe $y_2 \in A$, $l_2 \in I\!N$ e $\mathcal{B}_{y_2} \subset B$ centrado em $f^{l_2}(y_2)$. Sendo f contínua então $E_2 = A \cap f^{-l_2}(B_{y_2})$ é aberto em X. Por indução podemos demonstrar a existência de $E = E_n \subset E_{n-1} \subset \cdots \subset E_1$, tais que para todo $i = 1, ..., n$ $f^{l_i}(E_i) \subset A_i$. $\square$

Corolário 1 *Para todo $x \in E$ e $i = 1, \ldots, n$ temos que $O(x) \cap A_i \neq \emptyset$.*

E agora apresentarmos o teorema principal:

Teorema 2 *Seja $X \subset I\!R^q$ fechado e limitado e $f : X \to X$ contínua. Então f tem transitividade topológica se e somente se existir $x_0 \in X$ tal que $L(x_0) = X$.*

Prova : Primeiro mostraremos o parte do "se". Sejam $A, B \subset X$ conjuntos abertos em X e não vazios. É claro que se $L(x_0) = X$ então existe $x \in O(x_0) \cap A$, ou seja, existe $l \in I\!N$ de forma que $f^l(x_0) = x$. Assim, existe $k \in I\!N$ tal que $f^k(x) \in B$, pois contrário, existiria um número finito de pontos (menor ou igual a l) de $O(x_0)$ contido em B, o que implica que $B \not\subset L(x_0) = X$! Portanto, $f^k(A) \cap B \neq \emptyset$, isso é, f tem transitividade topológica.

Para o "somente se", suponha por absurdo que não existe uma órbita densa em X. Isso equivale a dizer que para todo $x \in X$ existe uma bola aberta $\mathcal{B}_x$ centrado em algum elemento de X, tal que $O(x) \cap \mathcal{B}_x = \emptyset$.

Agora, seja $\mathcal{B}_F$ uma bola fechada [2] em X centrada em algum elemento de X. Para cada $y \in \mathcal{B}_F$ existe uma bola aberta $\mathcal{B}_y$ centrada em algum elemento de X, com raio r_y, tal que $O(y) \cap \mathcal{B}_y = \emptyset$. Vamos provar que $\epsilon = \inf_{y \in \mathcal{B}_F}\{r_y\} > 0$.

Suponha por absurdo que $\epsilon = 0$. Então existe uma seqüência (x_n) contida em $\mathcal{B}_F$ de forma que $\lim r_{x_n} = 0$. Como $\mathcal{B}_F$ é fechada e limitada, existe uma subseqüência convergindo para $x_b \in \mathcal{B}_F$ com o raio r_{x_b} de $\mathcal{B}_{x_b}$ nulo, o que implica que $O(x_b)$ seria densa em X, o que é uma contradição.

[2] Dizemos que um conjunto D é fechado em X se existe $F \subset I\!R^q$ fechado tal que $D = F \cap X$

Isso verificado, podemos cobrir o conjunto com bolas de raio $\epsilon/4$. Desta cobertura podemos extrair uma cobertura finita $\cup S_i$, porque X é fechado e limitado. Sendo que no centro de todo $\mathcal{B}_y$ existe um ponto do conjunto X, então para todo $y \in \mathcal{B}_F$ existe um $S_i \subset \mathcal{B}_y$, senão $\cup S_i$ não seria uma cobertura de X. Disso resulta que existe um número finito de conjuntos $\cup_{i=1}^m A_i$ tal que todo A_i está contido em uma $\mathcal{B}_y$, e para todo $y \in \mathcal{B}_F$ existe $A_i \subset \mathcal{B}_y$.

Agora, adicionamos A_{m+1}, uma bola aberta cujo centro é o centro da $\mathcal{B}_F$ e $A_{m+1} \subset \mathcal{B}_F$, à família $\cup_{i=1}^m A_i$. Portanto, pelo Corolário 1 existe um conjunto $E \subset A_{m+1}$ onde para todo $x \in E$ temos que $O(x) \cap A_i \neq \emptyset$ para $i = 1, \dots, m$. Ou seja, sendo $x \in E \subset \mathcal{B}_F$ deverá existir uma bola aberta $\mathcal{B}_x$ tal que $O(x) \cap \mathcal{B}_x = \emptyset$; porém, sabemos que existe um i tal que $A_i \subset \mathcal{B}_x$, logo $O(x) \cap \mathcal{B}_x \neq \emptyset$, o que é uma contradição. Portanto, transitividade topológica implica que existe $x_0 \in X$ tal que $L(x_0) = X$. $\square$

Portanto, a definição de Wiggins incorpora as duas características de caos mencionadas na seção anterior: sensibilidade as condições iniciais, e que ao errar o valor de uma variável na entrada, por menor que o erro for, depois de um certo número de passos, a variável poderá ocupar qualquer estado do sistema.

Porém, uma dependência sensível às condições iniciais em relação ao domínio, D, é muito diferente do que em relação ao conjunto em questão ($X \subset D$) como veremos neste próximo exemplo:

Exemplo 2 Seja $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \ |x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$ Usando coordenadas polares definimos $F : D \to D$ por

$$F(x) = F(r, \theta) = (r, r + \theta)$$

Note que para todo $r \in (0, 2]$ o conjunto $C_r = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$ é invariante. Uma forma resumida de descrever este sistema dinâmico seria uma rotação. Não parece adequado chamá-lo de caótico, mas veremos que é caótico de acordo com esta definição. Primeiro, o sistema apresenta sensível dependência aos condições iniciais em relação a variável r: Seja $x_0 = (r_0, \theta_0)$. Para qualquer $d \geq 0$ escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $\pi/n \leq d$. Faça

$y = (r_0 + \pi/n, \theta_0)$, e então, $\|x_0 - y_0\| \leq d$, $x_n = (r_0, \theta_0 + nr_0)$ e $y_0 = (p_0 + \pi/n, \theta + nr_0 + \pi)$. Portanto $\|x_n - y_n\| \geq 2r_0$, onde o diâmetro de C_{r_0} é $2r_0$. Logo o sistema é caótico em C_{r_0}.Mais ainda, $x_0 = (r, 0)$ com r/π irracional, o que implica que $L(x_0) = C_r$. Vamos demonstrar esse fato, Seja $\epsilon > 0$. Iremos mostrar que existem $a, b \in I\!N$ tal que $\theta_a = ar_0 - 2\pi b < \epsilon$ onde θ_a é o arco na a-ésima iteração. Feito isso, dado um $\theta^* \in I\!R$ qualquer, se quisermos produzir um arco θ_{a_1} tal que $||\theta^* - \theta_{a1}|| < \epsilon$, basta escolher $a_1 = ka$ onde $k(ar_0 - 2\pi b) < a_1 < (k+1)(ar_0 - 2\pi b)$.

Primeiramente r/π irracional implica que $ar_0 \neq 2\pi b$. Agora, apresentaremos uma seqûencia $a_n r_0 - 2\pi b_n > 0$ decrescente. Por indução, o primeiro elemento será r_0, ou seja $a_1 = 1$ e $b_1 = 0$. Se $r_0 > 2\pi$ então $a_2 = 1$ e $b_2 = 1$ caso contrário $2r_0 - 2\pi < r_0$. Logo, escolhemos $a_2 = 2$ e $b_2 = 1$. Agora para o n-éssimo elemento, se $a_n r_0 - 2\pi b_n > 2\pi$ então escolhemos $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = b_n + 1$, caso contrário $(a_n + 1)r_0 - (b_n + 1)2\pi < a_n r_0 - b_n 2\pi$ e escolhemos $a_{n+1} = a_n + 1$ e $b_{n+1} = b_n + 1$. Como a seqüência é decrescente e limitado inferiormente por zero, existe $n \in I\!N$ tal que $a_n r_0 - 2\pi b_n < \epsilon$.

Se o segundo item da definição de Wiggins fosse dependência sensível nas condições iniciais em relação a X, o exemplo acima não seria classificado como caótico.

Mais um problema com essa definição surge com o denominado "Caos degenerado" que é comportamento caótico em um conjunto de pontos finito. Na verdade, de acordo com Wiggins, o caos pode se manifestar num ponto $X = x_0$. Por exemplo, o sistema governado pela função

$$f(x) = -2|x| + 1,$$

é caótico no conjunto $X = 1/3$, pois órbitas iniciadas perto de $1/3$ se afastam.

4.3 Martelli

De acordo com Martelli [8], o sistema é caótico em um conjunto invariante X se existir um x_0 tal que

(1) $L(x_0) = X$;

(2) $O(x_0)$ é instável em relação a X.

Como $f(L(x_0)) = L(x_0)$ temos que $f(X) = X$, ou seja, f é sobrejetora.

isso mostra que pelo Teorema 2, o item (1) de Martelli é equivalente ao item(1) de Wiggins. Porém, achamos mais natural a idéia de uma órbita $O(x_0)$ tal que $L(x_0) = X$ em comparação a propriedade de transitividade topológica. Mais ainda, pode se demonstrar o teorema a seguir:

Teorema 3 *Seja $x_0 \in X$ tal que $L(x_0) = X$. Então f tem dependência sensível às condições iniciais em relação a X se e somente se $O(x_0)$ for instável em relação a X.*

Prova: ver [2]. □

Uma diferença essencial entre as duas definições é que a de Wiggins não exige dependência sensível às condições iniciais *em relação a X*, sendo neste sentido menos restritivo. Devida a esta liberdade, o mapa $F(r, \theta)$ do Exemplo 2 foi classificado como caótico. No sentido de Martelli este mapa não é caótico em todos os círculos C_p, $p > 0$, ou em todas as coroas circulares. Nos círculos o mapa não satisfaz o item (1), e nas coroas circulares não satisfazem o item (2). Mais ainda, de acordo com Martelli, nenhum mapa possa ser caótico num conjunto finito, já que instabilidade de $O(x_0)$ em relação a X implica que X tem infinitos elementos.

4.4 Devaney

Um mapa é caótico no sentido de Devaney [5] em um conjunto invariante X se

(1) f apresenta transitividade topológica em X;

(2) f tem em X uma dependência sensível *às* condições iniciais;

(3) o conjunto P dos elementos com órbitas periódicos é denso em X.

Devaney adiciona a densidade de P em X às duas condições de Wiggins trazendo de volta, em algum aspecto, uma característica de caos de Li-Yorke. Também, como Crannel [4] traz a tona, o requerimento que P seja denso é atrativo para quem procura padrões em sistemas aparentemente aleatórios.

Foi demonstrado em [1] que as condições (1) e (3) implicam (2). Neste sentido a definição de Devaney é redundante. Mais ainda, como mostra o exemplo a seguir, existem alguns sistemas que parecem merecer a denominação "caóticos" mas não satisfazem ao terceiro item da definição de Devaney.

Exemplo 3 Seja F em coordenadas polares $F(r, \theta) = (4r(1-r), \theta + 1)$ e seja D_1 um disco invariante com centro no origem e raio 1. Para que um ponto tenha órbita periódica é necessário que para algum par $n, m \in I\!\!N$, $\theta + n = \theta + 2\pi m$, ou seja, $n/m = 2\pi$ o que é uma impossibilidade. Com exceção da origem, que é um ponto fixo, nenhum ponto é periódico. Agora mostraremos que no sentido de Martelli e Wiggins este mapeamento é caótico.

Sendo que nenhum ponto em D_1 é periódico, e sabemos, do relatório anterior, que sobre a ação de $f(r) = 4r(1-r)$ existe $r_0 \in (0,1)$ tal que $L(r_0) = [0,1]$, logo existe um (r_0, θ_0) tal que $L(r_0, \theta_0) = D_1$. Portanto, de acordo com a Teorema 2, F apresenta transitividade topológica. Logo para qualquer intervalo $[a, b] \subset [0, 1]$, existe um l de forma que $f^l[a, b] = [0, 1]$. Logo, em um número finito de iterações um disco qualquer D_r, com raio não nulo, irá cobrir um setor circular. E, depois de mais um número finito de iterações, a rotação irá desperçar o setor no disco todo. Portanto, F apresenta transitividade topológica em D_1 e também pelo Teorema 2 existe um (r_0, θ_0) de maneira que $L(r_0, \theta_0) = D_1$. Também ficou claro, mas não formalmente demonstrado, que F tem dependência sensível aos condições iniciais em $[0, 1]$. Desta forma, $O(x_0)$ é instável em $D(0, 1)$ e F é caótico em $D(0, 1)$ de acordo com Wiggins e Martelli.

Como exemplo, tomando $x_0 = (0.3, 0)$ e $y_0 = (0.300001, 0)$ a diferença $||x_n - y_n||$ já alcança 0.8 depois de 17 iterações; depois oscila entre 0.0001 e 0.999. Este exemplo sugere que talvez a densidade de órbitas periódicas não seja necessária para definir caos.

5 Conclusões

As várias definições podem revelar aspectos interessantes dependendo do exemplo. Apesar da falha da definição de Devaney no exemplo anterior, o fato que para uma grande categoria de sistemas "caóticos" as órbitas periódicas são densas no conjunto, especialmente em $I\!R$ é reveladora. Na definição de Wiggins faltam restrições: a definição permite dependência sensível às condições iniciais não em relação ao conjunto X.

Consideramos a definição de Martelli mais "correta" e a que esclarece mais. A Idéia de uma função que apresenta transitividade topológica parece mágica, um fenômeno no mínimo estranho. E é claro, porém, que é muito útil em demonstrações. A existência de um ponto x_0 tal que $L(x_0) = X$ é muito mais reveladora e ajuda muito em visualizar o que está ocorrendo: uma órbita costurando tudo, mas ao mesmo tempo instável!

Todavia, nesta área nada é definitivo. Cada exemplo deve ser estudado, sem se manter fixo nas definições, para depois revelar os mecanismos internos.

Referências

[1] J. Brooks, G. Cairns, G. Davis e P. Stacey. On Devaney's Definition of Chaos, *Amer. Math. Monthly* 99,(1992), 332-334.

[2] M. Martelli, M. Dang e T. Seph Defining Chaos, *Mathematics Magazine*, **71**, 12-122,1998.

[3] S. Wiggins, *Chaotic Transport in Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] A. Cranel, The Role of Transitivity in Devaney's Definition of Chaos, *Amer. Math. Monthly* 102(1995), 788-793.

[5] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* Addison-Wesley, U.S.A., 2th edition, 1989.

[6] T.T. Li e J.A Yorke, Period Three Implies Chaos, *American Mathematical Monthly*, **82**, 985-992, 1975.

[7] I. Stewart, *Será que Deus Joga Dados?*, Zahar, 1989.

[8] M. Martelli, *An Introduction to Discrete Dynamical Systems and Chaos*, Gordon and Breach, 1998.