Um Prova da Convergência da Serie de Fourier

Artur L Gower

3 de junho de 2013

...ideias matemáticos tem seus origens no empírico, apesar que a arvore genealógico é as vezes longo e obscuro. Porem, uma vez concebido, o assunto começa ter uma vida própria e criativa, governado quase inteiramente por motivações estéticas, mais que qualquer outra razão e, em particular, pela ciência empírica. Quando uma disciplina matemático começa a se distanciar do seu fonte empírico, ou ainda mais, quando for uma segunda ou terceira geração somente indiretamente inspirado por ideias provenientes da "realidade", ele herda um grave perigo. Ele se torna mais e mais puramente estético, mais e mais l'art pour l'art. Isso não é necessariamente ruim, se o campo for cercado por áreas, os quais ainda tem uma conexão mais próximo ao mundo empírico, ou se a área tiver sobre a influencia de homens com um "percepção" excepcionalmente bem desenvolvidos. Porém ainda há um grave perigo que o campo irá se desenvolver ao longo da linha onde há menos resistência, e que o riacho, tão longe da fonte, dividira se em um multitude de ramos insignificantes, e que a disciplina se tornará numa massa de detalhes e complexidades desorganizados. Em outras palavras, muito distante da sua fonte empírica, ou depois de muita endogamia "abstrata", uma disciplina matemática esta em perigo de degenerar.

–Von Neumann (do primeiro publicação da sua coletânea de trabalhos)

Neste trabalho quero mostrar que,

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} \to f(t), \text{ quando } n \to \infty,$$

onde,

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

E antes de mais nada, vou definir o produto interno,

$$< f, g >= \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt.$$

Onde este produto interno esta bem definido para $f, g \in L_2[0, 2\pi]$. Assim temos que $\{(2\pi)^{-1}, \cos(it)(\pi)^{-1}, \sin(it)(\pi)^{-1}, .., \sin(int)(\pi)^{-1}, \cos(int)(\pi)^{-1}, ...\}$ é um conjunto ortonormal. E irei denominar um elemento deste conjunto por x_n. E temos que,

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} < f, x_n > x_n(t)$$

Será que esta serie converge, vamos averiguar se é de cauchy,

$$|| \sum_{k=0}^{n} < f, x_k > x_k - \sum_{k=0}^{m} < f, x_k > x_k||_2^2 = || \sum_{k=m}^{n} < f, x_k > x_k||_2^2 = \sum_{k=m}^{n} | < f, x_k > |^2.$$

Reduzimos a pergunta a outra: a convergencia dos coeficientes de Fourier. Para este finalidade: note que $f - S_n(f)$ é ortogonal a todo x_k para k entre 0 e n. Logo $f = S_n(f) + g$, onde g é ortogonal a $S_n(f)$ e,

$$||f||_2^2 = ||S_n(f) + g||_2^2 = ||S_n(f)||_2^2 + ||g||_2^2 \Rightarrow ||S_n(f)||_2^2 < ||f||_2^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n} | < f, x_k > |^2. < ||f||_2^2.$$

Sendo que esta serie acima é crescente e limitado superiormente então converge. E isso garante que a serie de $S_n(f)$ é de Cauchy. Certo, converge, mas para que? Atacar o problema diretamente é arduo. Logo usarei o seguinte para facilitar. Se uma sequencia a_n converge, a media da sequencia, $n^0 \sum_{k=1}^{n+1} a_k$ converge para o mesmo número. Essa demonstracao é fácil. E a media da sequencia é mais comportada, isso vai faciltar nosso trabalho. Vamos provar o seguinte teorema,

Teorema 1 *(i)Se $f : \boldsymbol{T} = [0, 2\pi] \to C$ com $f \in L_2[0, 2\pi]$ e se f for continuo no ponto t,*

$$\sum_{0}^{n} (1+n)S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} \hat{f}(k)e^{ikt} \to f(t)$$

(ii) Se $f : \boldsymbol{T} \to C$ for continuo então,

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} \hat{f}(k) e^{ikt} \to f(t)$$

uniformemente em T.

Primeiro note que se $f \in L_2[0, 2\pi]$, $f : \boldsymbol{T} \to C$, então

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} \hat{f}(k) e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} (2\pi)^{-1} \int_{\boldsymbol{T}} f(x) e^{-ikx} dx . e^{ikt} = \tag{0.1}$$

$$(2\pi)^{-1} \int_{\boldsymbol{T}} f(x) \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ik(t-x)} dx = .(2\pi)^{-1} \int_{\boldsymbol{T}} f(x) K_n(t-x) dx, \tag{0.2}$$

onde

$$K_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{iks}$$

Agora faremos a substituição $s = t - x$, temos que

$$\sigma_n(f,t) =(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(t-x) dx = -(2\pi)^{-1} \int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-s) K_n(s) ds \tag{0.3}$$

$$=(2\pi)^{-1} \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(t-s) K_n(s) ds = (2\pi)^{-1} \int_{\boldsymbol{T}} f(t-s) K_n(s) ds. \tag{0.4}$$

Somos levados a examinar a estrutura de K_n em mais detalhe, vou fazer alguns simplificações. Se $s \neq 0$ então

$$\sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|) e^{iks} = e^{-ins} + 2e^{-i(n-1)s} + \cdots + (n+1)e^0 + ne^{is} + \cdots + e^{ins}$$

$$= \frac{1}{1-e^{is}} (e^{-ins} - e^{i(n+1)s} + e^{-i(n-1)s} - e^{ins} + \cdots + e^{-is} - e^{is} + 1)$$

$$= \frac{1}{1-e^{is}} \left(\frac{e^{-ins} - e^{is}}{1-e^{is}} - \frac{e^{is} - e^{i(n+1)s+is}}{1-e^{is}} \right) = \left(\frac{\sin(s(n+1)/2)}{\sin(s/2)} \right)^2$$

Portanto,

$$K_n(s) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin(\frac{s(n+1)}{2})}{\sin(\frac{s}{2})} \right)^2 \text{, if } s \neq 0, \tag{0.5}$$

$$K_n(0) = n+1. \tag{0.6}$$

A função tem três propriedades vitais,

$$\begin{aligned}&(1)\ K_n(s) \geq 0 \text{ para todo } s \in \boldsymbol{T},\\ &(2)\ K_n(s) \to 0 \text{ uniformemente fora de } [-\delta, \delta] \text{ para todo } \delta > 0,\\ &(3)\ (2\pi)^{-1} \int_{\boldsymbol{T}} K_n(s) ds = 1.\end{aligned}$$

Para provar (3) note que, retornando para a definição original,

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s) ds = \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iks} ds = 1$$

Todas estas propriedades provenham do fato que estamos trabalhando com a media da sequencia. E com esta características, ficou mais claro agora que K_n vai atuar como uma delta de Dirac. Agora iremos provar (i) do Teorema.

Seja $f : \boldsymbol{T} \to C$ onde $f \in L_2[0, 2\pi]$ e continuo no ponto t. Logo

$(a) ||f|| \leq M$

Sendo continuo em t sabemos que dado ϵ existe $\delta(t, \epsilon)$ tal que,

$(b) |f(s) - f(t)| \leq \epsilon/2$ para $|t - s| < \delta$.

Uma vez fixado $\delta(t, \epsilon)$ segue da propriedade (2) do K_n que podemos encontrar $N \in I\!N$, que depende de $\delta(t, \epsilon)$, tal que

$(c) |K_n(s)| \leq \epsilon/(4M)$ para todo $s \notin [-\delta, \delta]$ e $n \geq N(t, \epsilon)$.

Usando as propriedades de K_n temos que,

$$\int_{s\in[-\delta,\delta]} |K_n(s)| ds = \int_{s\in[-\delta,\delta]} K_n(s) ds \leq \int_{\boldsymbol{T}} K_n(s) ds.$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
&|\sigma_n(f, t) - f(t)| \\
&= |\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} f(t-s) K_n(s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} f(t) K_n(s) ds| = |\frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} (f(t-s) - f(t)) K_n(s) ds| \\
&\leq |\frac{1}{2\pi} \int_{s\in[-\delta,\delta]} (f(t-s) - f(t)) K_n(s) ds| + |\frac{1}{2\pi} \int_{s\notin[-\delta,\delta]} (f(t-s) - f(t)) K_n(s) ds| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{s\in[-\delta,\delta]} |K_n(s)| ds + \frac{1}{2\pi} \left(\int_{s\notin[-\delta,\delta]} |f(t-s) - f(t)|^2 ds \int_{s\notin[-\delta,\delta]} |K_n(s)|^2 ds \right)^{-1/2} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\boldsymbol{T}} K_n(s) ds + \frac{2M}{2\pi} \left(\int_{s\notin[-\delta,\delta]} (\frac{\epsilon}{4M})^2 ds \right)^{-1/2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Esta segunda desigualdade se da pela desigualdade de Swcharz. Este resultado vale para todo $n \geq N(t, \epsilon)$ e o Teorema esta provada. Sendo $\boldsymbol{T}$ compacto, qualquer função continuo será uniformemente continuo em $\boldsymbol{T}$ e os mesmos argumentos nos levem a concluir que $\sigma_n(f, t)$ converge uniformemente a $f(t)$.