

---

RELATÓRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
BOLSA FAPESP — PROCESSO 06/06983–2

O Método de Kirchhoff para o Modelamento  
Sísmico

---

Artur Gower

*Bolsista*

Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos

*Orientador*



UNICAMP

Março 2008 — Dezembro 2008



# 1 Introdução

O modelamento sísmico numérico é uma técnica para simular a propagação de ondas no subsolo terrestre. O objetivo é prever a resposta que um conjunto de sensores obterá, assumindo-se uma estrutura conhecida para a sub-superfície. Esta técnica é uma ferramenta poderosa para a interpretação sísmica e uma parte essencial dos algoritmos de inversão. Os principais métodos utilizados no modelamento sísmico podem ser classificados em três categorias: **(i) Diretos:** o modelo geológico é discretizado em um número finito de pontos (malha) e um método numérico é utilizado para encontrar uma aproximação para a solução da equação de onda completa; **(ii) Assintóticos:** computa-se o campo de ondas por partes, decompondo a equação de onda em duas outras equações (*Iconal e Transporte*); **(iii) Integrais:** utilizam representações integrais para o campo de ondas gerados por fontes pontuais (*Princípio de Huygens*).

## 2 Resumo

Usando o *Princípio de Huygens*, considere que os refletores na subsuperfície terrestre são um conjunto de pontos difratores que quando excitados por uma onda incidente, geram, cada um, uma contribuição ao campo de onda refletido. Matematicamente, para uma fonte pontual em  $x_s$  e considerando um refletor como uma superfície  $\Sigma$ , o campo de onda refletido registrado num receptor localizado em  $x_g$ ,  $U(x_g, x_s)$ , é dado pela equação integral de *Kirchhoff-Helmholtz*,

$$U(x_g, x_s) = \iint_{\Sigma} [U(x, x_s) \partial_n G(x, x_g) - G(x, x_g) \partial_n U(x, x_s)] d\Sigma$$

onde  $G(x, x_g)$  é a função de Green em  $x$  para a fonte pontual em  $x_g$ , i.e., o campo de onda registrado em  $x$  para uma fonte em  $x_g$  sem a presença do refletor, e  $\partial_n$  denota a derivada normal em relação à superfície  $\Sigma$ . Observe que a fórmula acima é uma *equação integral* exata, relacionando o campo refletido  $U(x_g, x_s)$  com os valores desse mesmo campo na superfície refletora,  $U(x, x_s)$ .

O *Método de Kirchhoff* consiste basicamente em considerar, na equação integral acima, uma aproximação de onda plana para  $U(x, x_s)$  e, claro, para a respectiva derivada normal. Tal aproximação é dada por:

$$U(x, x_s) \approx R(x, x_s)G(x, x_s), \quad \partial_n U(x, x_s) \approx -R(x, x_s)\partial_n G(x, x_s), \quad x \in \Sigma,$$

onde  $G(x, x_s)$  é a função de Green em  $x$  para a fonte pontual em  $x_s$  e  $R(x)$  é coeficiente de reflexão apropriado. Substituindo as aproximações acima na integral de Kirchhoff-Helmholtz, obtemos

$$U(x_g, x_s) \approx \iint_{\Sigma} R(x, x_s)\partial_n[G(x, x_s)G(x, x_g)]d\Sigma$$

O método de Kirchhoff pode ser utilizado para modelos tridimensionais ou mesmo bidimensionais mais simples, bastando considerar a superfície refletora como uma curva no plano. Pode-se também considerar a chamada aproximação *2.5-dimensional* onde o meio tridimensional possui um eixo de simetria cilíndrica, onde a fonte e o receptor se localizam em uma linha ortogonal a esse eixo.

### 3 Revisão e Conceitos Básicos

Abaixo segue uma lista dos assuntos estudados:

- Revisão dos principais resultados sobre integrais de superfície e volume, com ênfase nas fórmulas de Green. Todas as deduções relevantes ao tema, foram deduzidos através das formas diferenciais, ou seja, possibilitando o uso do teorema geral de Stokes. Esta foi a forma mais intuitiva escolhida por nós.
- Como possuíamos pouca familiaridade com EDP's, abordamos inicialmente uma introdução ao método das curvas características para EDP's quase lineares e não lineares.
- Estudo da equação de onda acústica 1D, 2D e 3D, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Incluindo equações de onda plana, onda esférica,

uma introdução as funções de Green e as particularidades de encontrar a função de Green para a equação de Helmholtz.

### 3.1 O Coeficiente de Reflexão de Onda Plana

Investigaremos o que acontece quando ondas acústicas planas viajando num fluido **I** mudam de meio para um fluido **II**. O fluido **I** tem densidade  $\rho_1$  e velocidade de propagação de onda  $c_1$  enquanto no fluido **II** os parâmetros são  $\rho_2$  e  $c_2$ . Consideraremos  $\rho_1, c_1\rho_2$  e  $c_2$  constantes. As conclusões deste sessão motivarão aproximações que usaremos depois.

Os campos de onda que queremos averiguar podem ser representados por uma série de Fourier. Logo, a nossa onda incidente será um termo desta expansão,

$$\begin{aligned}\Phi_I &= a_I \cos \omega(n_I \cdot \mathbf{r}/c_1 - t) \\ \text{e } n_I &= (\sin \theta_1, \cos \theta_1, 0).\end{aligned}$$

Onde  $a_I$  é a amplitude de  $\Phi_I$ ,  $\theta_1$  é o ângulo entre o normal do plano e o vetor  $n_I$  e  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Veja a Figura (3.1) abaixo. A forma mais genérica seria adicionar uma mudança de fase dentro do cosseno, porém os cálculos seriam os mesmos. Por argumentos de simetria, e levando em consideração que os campos das ondas obedecem a EDP (9) temos que,

$$\Phi_R = a_R f_R(\cos \omega(n_R \cdot \mathbf{r}/c_1 - t)), \quad (1)$$

$$\Phi_T = a_T f_T(\cos \omega(n_T \cdot \mathbf{r}/c_2 - t)), \quad (2)$$

$$n_R = (\sin \theta'_1, -\cos \theta'_1, 0), \quad (3)$$

$$n_T = (\sin \theta_2, \cos \theta_2, 0) \quad (4)$$

$$\text{e } c_2/c_1 \sin \theta'_1 = \sin \theta_2. \quad (5)$$

Para justificar as equações acima, considere que o sistema entra num estado estacionário. A solução do campo de onda refletida  $\Phi_R$  e transmitida  $\Phi_T$  serão invariantes se transladamos todas as soluções por  $2\pi/\omega$  no tempo. Por exemplo  $\Phi_R(x, t_0) =$

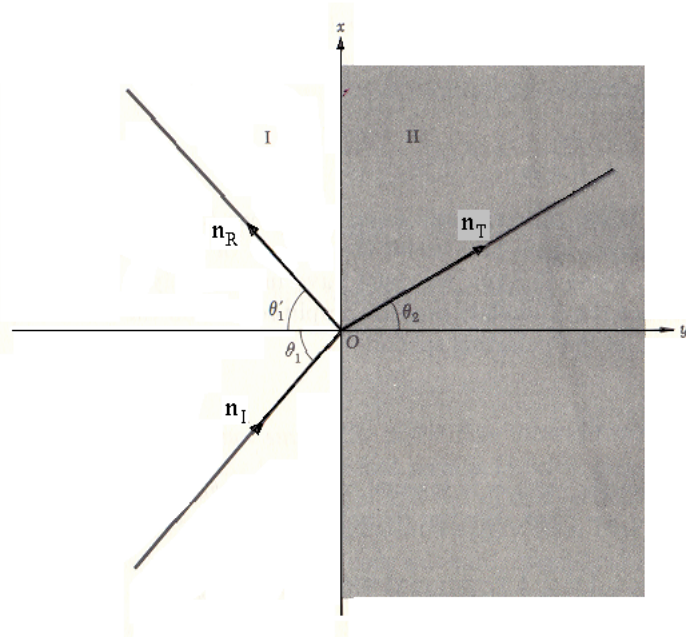


Figura 1: Ângulos de reflexão e transmissão.

$\Phi_R(x, t_0 + 2\pi/\omega) = \Phi_R(x, t_0 + 2n\pi/\omega)$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , o mesmo vale para  $\Phi_T$ . Veja a Figura 2.

Para justificar porque  $\Phi_R$  e  $\Phi_T$  serão ondas planas, considere o conjunto de pontos  $P$ ,  $\mathbf{r} \in P$ , tais que  $\Phi_I(\mathbf{r}, t) = k$ ,  $k$  constante. Para cada instante no tempo,  $P(t)$  será um conjunto de planos com pressão constante. Observamos a evolução temporal de um plano contido em  $P$  e vamos analisar o que ocorre na interface. Não sabemos como um desses planos irá perturbar a interface, porém, sabemos que esta perturbação será igual para qualquer ponto  $(x, 0, z)$  pertencente ao plano e à interface. Assim, por simetria as ondas geradas por essa perturbação serão ondas planas.

Além de serem ondas planas com a mesma frequência de  $\Phi_I$ ,  $\Phi_R$  e  $\Phi_T$  precisam obedecer a EDP de ondas acústicas, dada pela equação (9). A consequência disso tudo é que uma das possíveis escolhas para representar  $\Phi_R$  e  $\Phi_T$  são as equações (1) e (2), respectivamente.

Para justificar as escolhas feitas para  $n_R$  e  $n_T$  observe que na Figura 2 as amplitudes de  $\Phi_I$ ,  $\Phi_R$  e  $\Phi_T$  variam da mesma forma ao longo do eixo  $x$ . Logo  $\sin \theta_1/c_1 = \sin \theta'_1/c_1 = \sin \theta_2/c_2$ , junte se isso à nossa intuição que diz que a onda refletida irá voltar,  $\cos \theta'_1 > 0$ ,

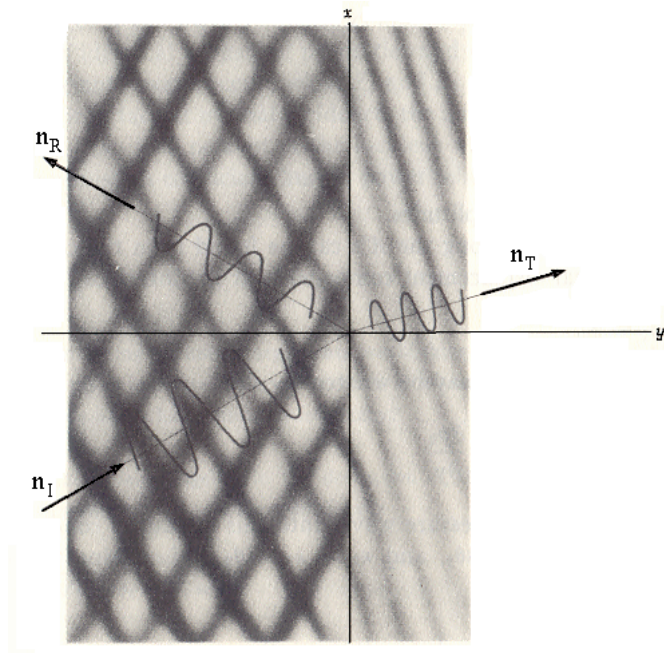


Figura 2: A continuidade de frentes de ondas numa interface.

e que a onda transmitida irá propagar para a direita,  $\cos \theta_2 > 0$ , e sabemos os valores de  $n_R$  e  $n_T$ .

Usemos a continuidade da pressão na superfície refletora,

$$(i)(\rho_1 \Phi_I + \rho_1 \Phi_R) \Big|_{y=0} = \rho_2 \Phi_T \Big|_{y=0},$$

e a continuidade da derivada normal,

$$(ii)(\partial_n \Phi_I + \partial_n \Phi_R) \Big|_{y=0} = \partial_n \Phi_T \Big|_{y=0}.$$

Desenvolvendo a equação (i) concluímos que

$$\rho_1 a_I \cos \omega \left( \frac{x}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) + \rho_1 a_R f_R \left( \cos \omega \left( \frac{x}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) \right) = \rho_2 a_T f_T \left( \cos \omega \left( \frac{x}{c_2} \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) \right),$$

ou seja

$$f_T \left( \cos \omega \left( \frac{x}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) \right) = \frac{\rho_1}{\rho_2 a_T} \left[ a_I \cos \omega \left( \frac{x}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) + a_R f_R \left( \cos \omega \left( \frac{x}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) \right) \right].$$

Para  $\lambda \in [-1, 1]$ , ou seja, o domínio de  $f_T$  e  $f_R$ , temos que

$$a_T f_T(\lambda) = \frac{\rho_1}{\rho_2} [a_I \lambda + a_R f_R(\lambda)] \quad (6)$$

Agora partiremos para a condição (ii) usando  $\gamma = \omega \left( \frac{x}{c_1} \sin \theta_1 - t \right)$  e a equação acima temos que

$$-a_I \sin \gamma \frac{\omega \cos \theta_1}{c_1} + a_R f'_R(\cos \gamma) \sin \gamma \frac{\omega \cos \theta_1}{c_1} = -a_T f'_T(\cos \gamma) \sin \gamma \frac{\omega \cos \theta_2}{c_2},$$

ou seja

$$-a_I \sin \gamma \frac{\omega \cos \theta_1}{c_1} + a_R f'_R(\cos \gamma) \sin \gamma \frac{\omega \cos \theta_1}{c_1} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} [a_I + a_R f'_R(\cos \gamma)] \sin \gamma \frac{\omega \cos \theta_2}{c_2}$$

Se assumirmos que  $\sin \gamma \neq 0$  então não saberemos o valor de  $f_R(1)$  e  $f_T(1)$ . Logo, o que faremos é descobrir as funções  $f_R$  e  $f_T$  nos casos em que  $\gamma \neq 0$  e, depois, exigindo continuidade, saberemos  $f_R(\cos 0) = f_R(1)$  e  $f_T(1)$ . Logo,

$$a_R f'_R(\cos \gamma) \left[ \frac{\cos \theta_1}{c_1} + \frac{\rho_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2} \right] = a_I \left[ \frac{\cos \theta_1}{c_1} - \frac{\rho_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2} \right]. \quad (7)$$

Sendo que  $\gamma$  é a única variável livre então  $f'_R$  é constante, ou

$$\left[ \frac{\cos \theta_1}{c_1} + \frac{\rho_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2} \right] = 0 \quad \text{e} \quad \left[ \frac{\cos \theta_1}{c_1} - \frac{\rho_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2} \right] = 0,$$

o que implica em

$$\cos \theta_1 = 0 \quad \text{e} \quad \cos \theta_2 = 0.$$

Ou seja, as ondas, incidente e transmitida, seriam laterais. Esta possibilidade é razoável, porém não nos interessa, pois a fonte das nossas ondas incidentes será afastada da superfície refletora. Logo  $f'_R$  é constante e, então,  $a_R f_R(\lambda) = a_R(\lambda + c)$  ou

$$a_R f_R(\cos \omega(n_R \cdot \mathbf{r}/c_1 - t)) = a_R(\cos \omega(n_R \cdot \mathbf{r}/c_1 - t) + c).$$

A liberdade de  $a_R$  torna esta expressão a representação geral. Substituindo este resultado na equação (7) resulta que

$$\begin{aligned} a_R &= a_I \left[ \frac{\cos \theta_1}{c_1} - \frac{\rho_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2} \right] \left[ \frac{c_1 c_2 \rho_2}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} \right] \\ &= a_I \left[ \frac{c_2 \rho_2 \cos \theta_1 - c_1 \rho_1 \cos \theta_2}{c_2 \rho_2 \cos \theta_1 + c_1 \rho_1 \cos \theta_2} \right] \end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação que relaciona o campo de onda transmitida com a refletida (6) temos que,

$$a_T f_T(\lambda) = \frac{\rho_1}{\rho_2} \lambda [a_I + a_R] + c \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Sobre a constante  $c$ , as condições de continuidade podem ser satisfeitas para qualquer  $c$ , porém soma da Intensidade das ondas refletida e transmitida seria maior que a intensidade da onda incidente, se  $c \neq 0$ , logo  $c$  desaparece das nossas equações. Então  $f_T(\lambda) = \lambda$  e  $a_T = \rho_1/\rho_2(a_I + a_R)$ . Sendo que os mesmos cálculos podem ser feitas se  $\Phi_I$  fosse em função de um cosseno defasado, o resultado final é

$$\begin{aligned} \Phi_I &= a_I \exp i\omega(n_I \cdot \mathbf{r}/c_1 - t) \\ \Phi_T &= a_I \left[ \frac{2c_2\rho_1 \cos \theta_1}{c_2\rho_2 \cos \theta_1 + c_1\rho_1 \cos \theta_2} \right] \exp i\omega(n_T \cdot \mathbf{r}/c_2 - t), \\ \Phi_R &= a_I \left[ \frac{c_2\rho_2 \cos \theta_1 - c_1\rho_1 \cos \theta_2}{c_2\rho_2 \cos \theta_1 + c_1\rho_1 \cos \theta_2} \right] \exp i\omega(n_R \cdot \mathbf{r}/c_1 - t), \\ n_I &= (\sin \theta_1, \cos \theta_1, 0) \\ n_T &= (\sin \theta_2, \cos \theta_2, 0) \\ n_R &= (\sin \theta_1, -\cos \theta_1, 0) \\ \text{e} \quad \cos \theta_2 &= \sqrt{1 - \left( \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 \right)^2}. \end{aligned}$$

E agora, com uma finalidade mais ampla, observe que na superfície  $\Phi_R = R\Phi_I$  e  $\partial_n \Phi_R = -\partial_n \Phi_I$ . Onde  $\partial_n$  é a derivada parcial na direção normal a superfície. E

$$R = \left[ \frac{c_2\rho_2 \cos \theta_1 - c_1\rho_1 \cos \theta_2}{c_2\rho_2 \cos \theta_1 + c_1\rho_1 \cos \theta_2} \right].$$

Na aproximação de Kirchhoff, aproximaremos a função de Green (12) como sendo localmente uma onda plana. Desta forma, usaremos os resultados aqui encontrados para aproximar a reflexão da função de Green.

## 4 A Aproximação de Kirchhoff

O Teorema de Green permite representarmos o campo de onda de cada lado de uma superfície infinita em função do campo de onda e a sua derivada normal na superfície.



Iremos fazer um distinção entre "representação" e "solução". Uma solução de Kirchhoff é uma integral, sobre a superfície, na qual os valores do campo de onda são substituídos por quantidades conhecidas. Queremos, então, transformar a representação numa fórmula integral. Para tanto, primeiro iremos deduzir esta representação.

## 4.1 A Integral de Kirchhoff

Considere um problema onde uma fonte pontual em  $x_s$  é disparada acima de uma superfície infinita, denotada por  $\Sigma$ . As funções  $c_-(x)$  e  $c_+(x)$  são as velocidades de propagação de onda acima e abaixo de  $\Sigma$ , e  $\rho_-(x)$  e  $\rho_+(x)$  são a densidade acima e abaixo de  $\Sigma$ . O campo de onda total será a soma de onda refletida,  $u_R(x, x_s, t)$ , de onda transmitida,  $u_T(x, x_s, t)$  e de onda incidente,  $u_I(x, x_s, t)$ , ou seja,

$$c(x) = \begin{cases} c_-(x), & \text{acima de } \Sigma \\ c_+(x), & \text{abaixo de } \Sigma, \text{ onde} \end{cases}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_-(x), & \text{acima de } \Sigma \\ \rho_+(x), & \text{abaixo de } \Sigma, \text{ onde} \end{cases}$$

$$u(x, x_s, t) = \begin{cases} u_I + u_R, & \text{acima de } \Sigma \\ u_T, & \text{abaixo de } \Sigma, \text{ onde} \end{cases}$$

tal que

$$\rho(x) \nabla \left[ \frac{1}{\rho(x)} \nabla u(x, x_s, t) \right] - \frac{1}{c(x)} \partial_{tt} u(x, x_s, t) = -f(t) \delta(x - x_s), \quad (8)$$

onde  $\partial_{tt} u$  é a segunda derivada parcial no tempo de  $u$  e  $f$  é a assinatura da fonte. Agora, iremos aplicar a transformada de Fourier na equação (8) e definimos,

$$U(x, x_s, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, x_s, t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\text{e } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

. Sabemos que o campo de onda (a pressão) em 3D decai com o tempo. Este fato também é verificado na solução de ondas planas e esféricas. Também obrigaremos que o campo de onda seja nulo para  $t < 0$ . Dessa forma temos que:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(x, x_s, t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \partial_t u(x, x_s, t) = 0.$$

Portanto, aplicando a transformada de Fourier na equação (8), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_- U_I(x, x_s, \omega) &= \rho_-(x) \nabla \left[ \frac{1}{\rho_-(x)} \nabla U_I(x, x_s, \omega) \right] + \frac{\omega^2}{c_-^2(x)} U_I(x, x_s, \omega) = -F(\omega) \delta(x - x_s), \\ \mathcal{L}_- U_R(x, x_s, \omega) &= \rho_-(x) \nabla \left[ \frac{1}{\rho_-(x)} \nabla U_R(x, x_s, \omega) \right] + \frac{\omega^2}{c_-^2(x)} U_R(x, x_s, \omega) = 0, \\ \mathcal{L}_+ U_T(x, x_s, \omega) &= \rho_+(x) \nabla \left[ \frac{1}{\rho_+(x)} \nabla U_T(x, x_s, \omega) \right] + \frac{\omega^2}{c_+^2(x)} U_T(x, x_s, \omega) = 0. \end{aligned}$$

Iremos emendar essas ondas exigindo que o campo de onda total seja contínuo e que a derivada normal multiplicada pela densidade seja contínua na superfície refletora. Desenvolveremos uma representação da solução para o caso de uma “explosão perfeita”,  $F(\omega) \delta(x - x_s)$ , e depois, usando essa solução, podemos por convolução chegar numa solução mais genérica.

Faremos uma dedução para descobrir o campo de onda acima da superfície  $\Sigma$  para o caso  $\rho(x)$  constante. Logo a equação (8) se reduz a,

$$\mathcal{L} U(x, x_s, \omega) = \nabla^2 U(x, x_s, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(x)} U(x, x_s, \omega) = -F(\omega) \delta(x - x_s). \quad (9)$$

Assumiremos que o campo de onda total satisfaz as condições de radiação do Sommerfeld,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rU = \text{limitado e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{c(x)} \frac{\partial u}{\partial t} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{i\omega}{c(x)} U \right] = 0, \quad (10)$$

Onde  $r = ||x||$ . Começamos com o seguinte resultado do Teorema de Stokes generalizado (Teorema de Green),

$$\int_D (H \mathcal{L} U - U \mathcal{L} H) dV = \int_{\partial D} \left( H \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial H}{\partial n} \right) dS. \quad (11)$$

Nesta equação, a derivada normal sempre aponta para fora da fronteira  $\partial D$ , uma superfície fechada contida no  $R^3$ , e  $H$  e  $U$  são funções diferenciáveis cujos domínios abrangem  $D$ . O

desenvolvimento matemático utilizado para chegar na equação (11) usa formas diferenciais (Veja Apêndice A.2).

Introduzimos uma esfera com raio  $R$  suficientemente grande (ao final tomaremos o limite  $R \rightarrow \infty$ ). Veja a Figura 3 abaixo. Esta esfera corta  $\Sigma$  de forma que os domínios acima e abaixo de  $\Sigma$ , respectivamente  $D_a$  e  $D_b$ , são aproximadamente semiesferas, onde  $D_a$  contém os pontos  $x_s$  e  $x_g$ , a posição da fonte e a posição do geofone. Denotamos por  $\Sigma_D$  a parte da superfície  $\Sigma$  que está contida em  $D$ . As superfícies  $S_a$  e  $S_b$  representam as cascas das semiesferas que se encontram acima e abaixo de  $\Sigma$ , respectivamente. Na equação (11),

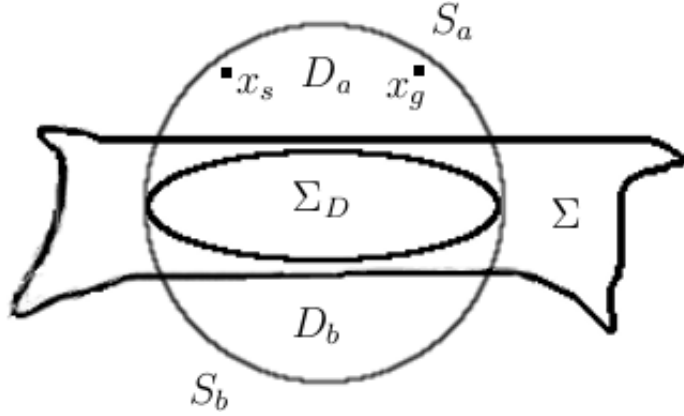


Figura 3: Diagrama que descreve os domínios usados na dedução da integral de Kirchhoff.

tomamos  $D = D_a$ ,  $\partial D = S_a \cup \Sigma_D$ , a função  $U = U(x, x_s, \omega)$  e  $H = G_g = G(x, x_g, \omega)$  onde

$$\mathcal{L} G(x, x_m, \omega) = -\delta(x - x_m) \quad (12)$$

Denominamos  $G_m$  a função de green da equação acima e  $G_s = G(x, x_s, \omega)$  a função de Green da equação (9). Desta forma, desenvolvendo a equação (11) com as substituições mencionadas acima, podemos escrever a seguinte equação integral

$$\begin{aligned} \int_{D_a} [G_g \mathcal{L} U - U \mathcal{L} G_g] dV &= U(x_g, x_s, \omega) - F(\omega) G(x_s, x_g, \omega) \\ &= U_I(x_g, x_s, \omega) + U_S(x_g, x_s, \omega) - F(\omega) G(x_s, x_g, \omega) \\ &= \int_{\Sigma_D \cup S_a} \left[ G_g \frac{\partial(U_I + U_S)}{\partial n} - (U_I + U_S) \frac{\partial G_g}{\partial n} \right] dS \end{aligned}$$

Podemos aplicar a identidade de Green, equação (11), nas funções  $G_g$  e  $U_I$  e assim estabelecemos que

$$\int_{D_a} [G_g \mathcal{L} U_I - U_I \mathcal{L} G_g] dV = U_I(x_g, x_s, \omega) - F(\omega) G(x_s, x_g, \omega) \quad (13)$$

$$= \int_{\Sigma_D \cup S_a} \left[ G_g \frac{\partial U_I}{\partial n} - U_I \frac{\partial G_g}{\partial n} \right] dS. \quad (14)$$

Usamos esta identidade nas duas últimas linhas da equação anterior para chegar no resultado

$$U_S(x_g, x_s, \omega) = \int_{\Sigma_D \cup S_a} \left[ G_g \frac{\partial U_S}{\partial n} - U_S \frac{\partial G_g}{\partial n} \right] dS. \quad (15)$$

O próximo passo é examinar as consequências nesta identidade quando o raio  $R$  tender para o infinito. No apêndice A.1, mostramos que a integral em  $S_a$  tende para zero, e a integral em  $\Sigma_D$  converge quando  $R \rightarrow \infty$ . Assim no limite  $R \rightarrow \infty$  podemos escrever

$$U_S(x_g, x_s, \omega) = \int_{\Sigma} \left[ G_g \frac{\partial U_S}{\partial n} - U_S \frac{\partial G_g}{\partial n} \right] d\Sigma.$$

Finalmente fazemos mais uma alteração nesta equação, lembrando que a direção do vetor normal aponta para fora do domínio de intergração; isso implica que o vetor normal da equação acima aponta para baixo. Preferimos que seja para cima, ou seja, em direção à fonte. Logo escrevemos

$$U_S(x_g, x_s, \omega) = \int_{\Sigma} \left[ U_S \frac{\partial G_g}{\partial n} - G_g \frac{\partial U_S}{\partial n} \right] d\Sigma. \quad (16)$$

Isto é a nossa representação do campo de onda refletida em termos dos valores do campo de onda e sua derivada normal na superfície. Deve ser notado que  $\Sigma$  não é necessariamente uma superfície refletora com descontinuidades nos parâmetros do meio nos dois lados. E se  $\Sigma$  fosse uma superfície finita, seria possível estender, a partir dela, uma superfície infinita, permitindo que os parâmetros do meio sejam descontínuos apenas numa parte de  $\Sigma$ .

Para transformar a representação (16) do campo de onda refletida numa fórmula integral faremos as aproximações

$$U_S(x, x_s, \omega) \approx R(x, x_s) G(x, x_s, \omega) \quad \text{e} \quad \partial_n U_S(x, x_s, \omega) \approx -\partial_n R(x, x_s) G(x, x_s, \omega)$$

para  $x \in \Sigma$ . Desta forma, estamos aproximando o campo de onda  $U_I$  por uma onda plana. Substituindo estas aproximações na integral de Kirchhoff (16) obtemos que

$$U_S(x_g, x_s, \omega) \approx \int_{\Sigma} R(x, x_s) \frac{\partial}{\partial n} [GG_g] d\Sigma, \quad (17)$$

## 4.2 Experimentos Numéricos

Implementamos um código para calcular a aproximação de Kirchhoff na linguagem C++. Para validar este programa apresentaremos os resultados de dois casos. Em ambos, a distância é medida em quilômetros e o tempo em segundos.

No primeiro caso, a superfície refletora é descrita por  $z = 1$ , a fonte se encontra na origem,  $x_s = (0, 0, 0)$ , e o geofone é colocado no ponto  $x_g = (1, 0, 0)$ , onde  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 2.5$ ,  $\rho_2 = 1$  e  $\rho_1 = 1$ . O algoritmo computa a integral de Kirchhoff (17) em um domínio finito  $[0, 2] \times [-2, 2]$ , que se encontra no plano  $(x, y)$ . Foi usada uma malha com  $\nabla x = \nabla y = 0.005$ . O resultado se encontra no gráfico abaixo. Para verificar este

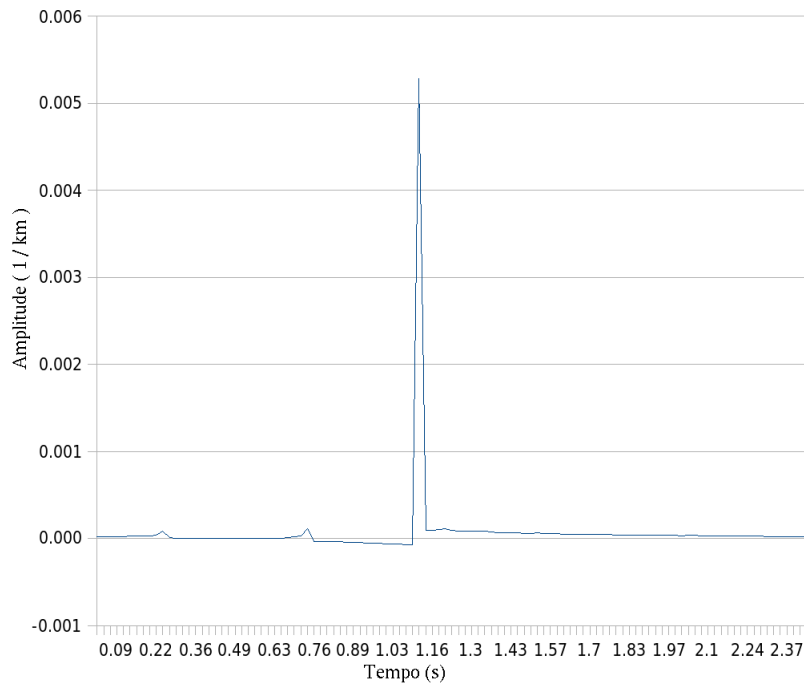


Figura 4: A Amplitude do campo de onda refletida da superfície  $z = 1$ .

resultado, comparamos com o resultado obtido por um outro programa cujo validade foi previamente verificado.

O segundo caso tem, como finalidade testar o programa num exemplo mais elaborado. A superfície refletora é descrita por  $z = 2 - \exp(-x^2/2)$ , a fonte se encontra no ponto  $x_s = (-1, 0, 0)$  e para cada simulação o geofone foi colocado em pontos diferentes,  $x_g = (a, 0, 0)$  com  $a = 0.0, 0.1, \dots, 1$ . Onde  $c_1 = 1.5$ ,  $c_2 = 2.0$ ,  $\rho_2 = 1$  e  $\rho_1 = 1$ . O domínio de integração muda dependendo da posição do geofone. Com malha  $\nabla x = 0.001$  e  $\nabla y = 0.002$ .

Os resultados estão apresentados nas figuras a seguir. Além disso, resumimos em uma tabela a posição do geofone,  $x_g$ , quanto tempo passou até o pico aparecer,  $\tau$ , a amplitude do pico,  $A$ , e o domínio de integração usado no algoritmo.

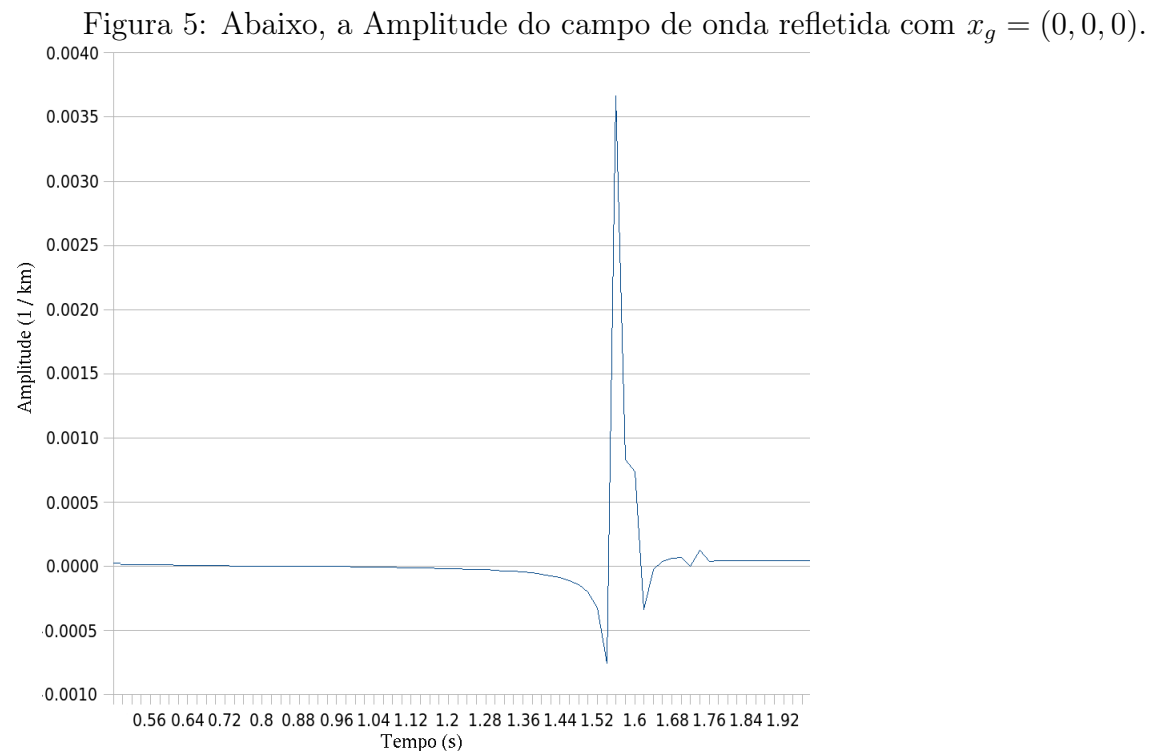


Figura 6: Abaixo, a Amplitude do campo de onda refletida com  $x_g = (0.2, 0, 0)$ .

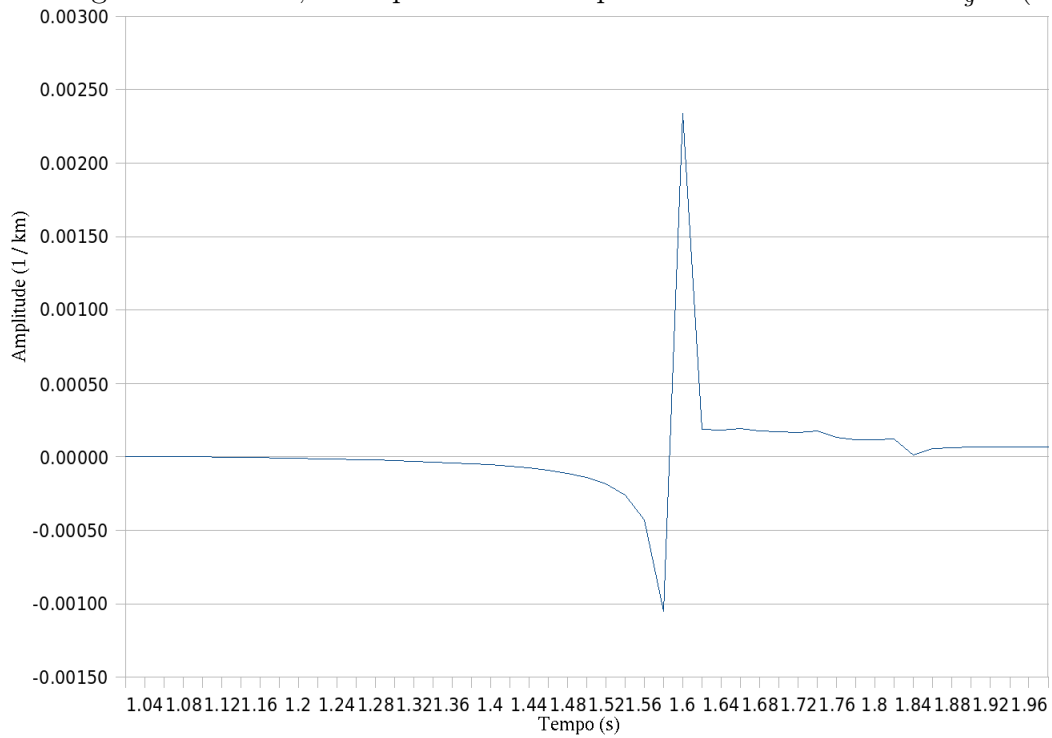


Figura 7: A Amplitude do campo de onda refletida com  $x_g = (0.4, 0, 0)$ .

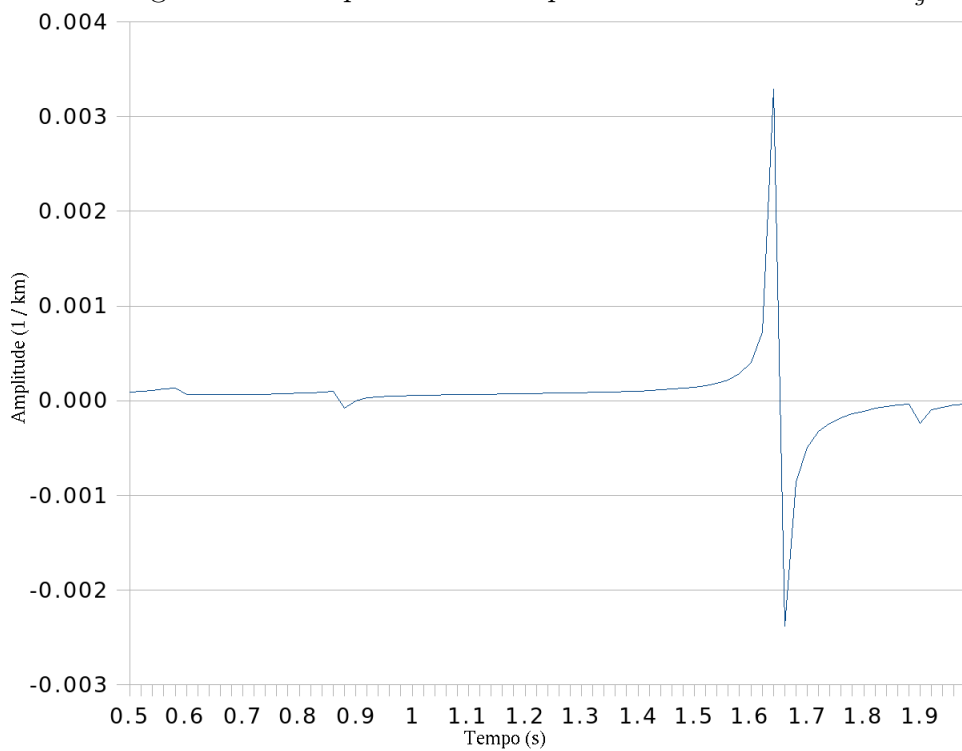


Figura 8: Abaixo, a Amplitude do campo de onda refletida com  $x_g = (0.6, 0, 0)$ .

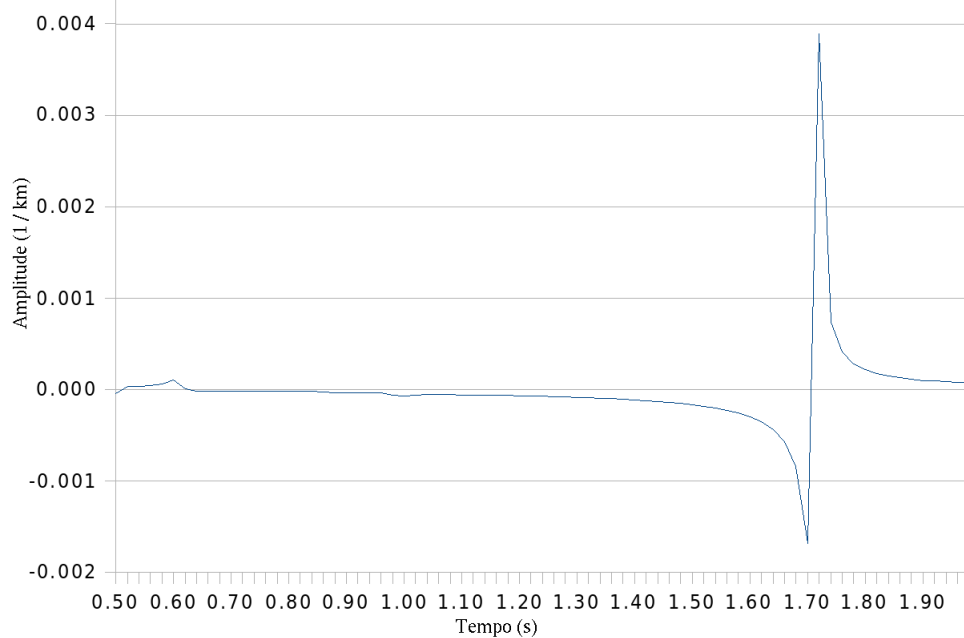


Figura 9: A Amplitude do campo de onda refletida com  $x_g = (0.8, 0, 0)$ .

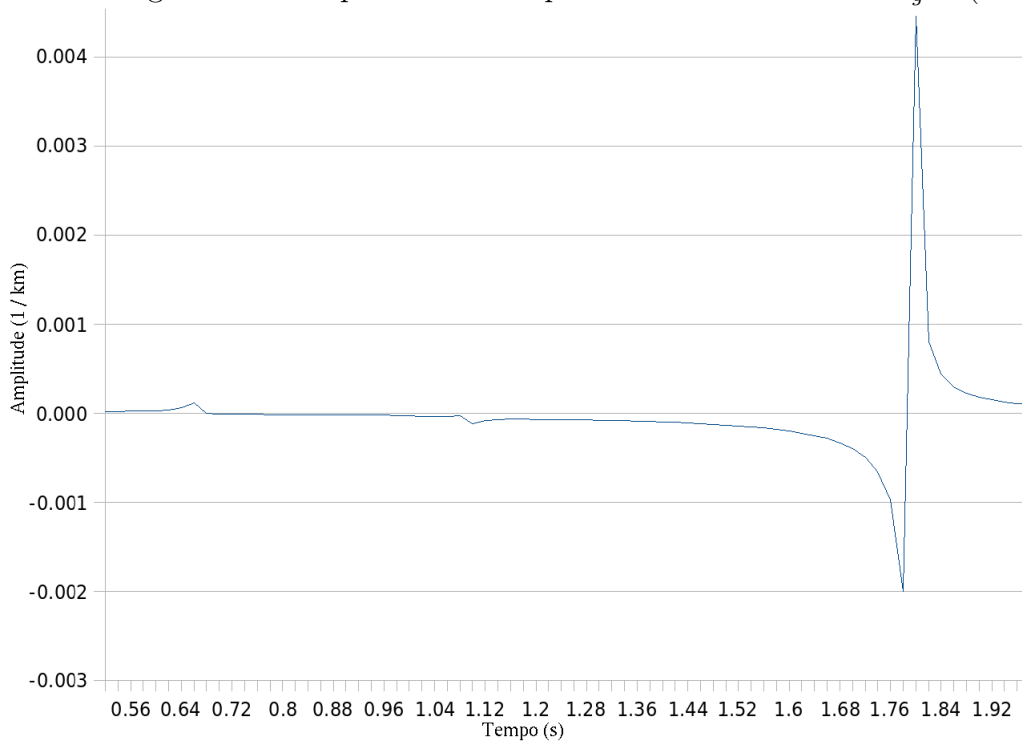
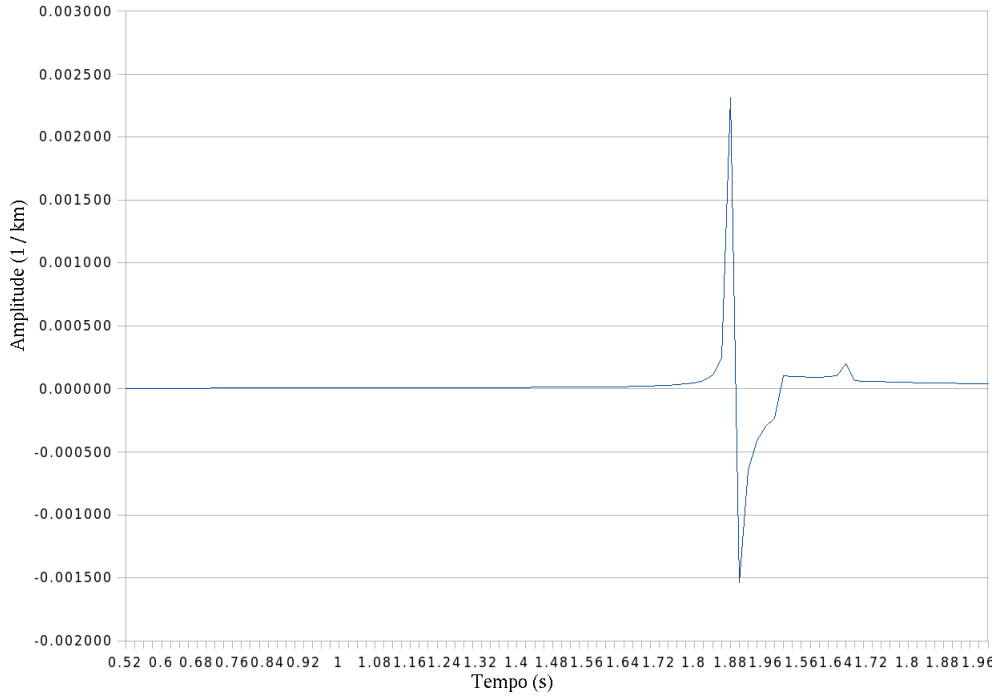




Figura 10: A Amplitude do campo de onda refletida com  $x_g = (1.0, 0, 0)$ .



Abaixo a tabela que resume os resultados das figuras.

$x_g$	$t$	$A$	Domínio
(0.0, 0, 0)	1.56	0.0366	$[-3, 0.0] \times [-3, 3]$
(0.2, 0, 0)	1.60	0.0234	$[-3, 0.2] \times [-3, 3]$
(0.4, 0, 0)	1.64	0.0330	$[-3, 0.4] \times [-3, 3]$
(0.6, 0, 0)	1.72	1.0389	$[-3, 0.6] \times [-3, 3]$
(0.8, 0, 0)	1.80	0.0445	$[-3, 0.8] \times [-3, 3]$
(1.0, 0, 0)	1.88	0.0234	$[-3, 1.0] \times [-3, 3]$

1.56 0.0035 0.2 1.59 0.0030 0.4 1.65 0.0045 0.6 1.72 0.0045 0.8 1.80 0.0055 1.0 1.89 0.0050

### 4.3 Conclusão

Este projeto foi muito importante para meu entendimento sobre o assunto. Vários temas foram abordados, fornecendo uma visão geral sobre modelamento de ondas sísmicas. O programa desenvolvido apresentou bons resultados e tem flexibilidade suficiente para ser reaproveitado em projetos futuros.

Os estudos realizados neste trabalho me levaram a querer continuar com o tema em um futuro projeto de mestrado em matemática aplicada, no qual ja fui aceito para ingresso como aluno regular, na Unicamp, no início de 2009. Possivelmente em modelamento Kirchhoff ou outras idéias que surgiram durante este trabalho.

## A Apêndice

### A.1 Convergência da Integral de Kirchhoff

Considere a integral sobre  $S_a$ . Neste caso  $dS = R^2 d\Omega$ , onde  $d\Omega$  representa o ângulo sólido diferencial da esfera. Quando o raio aumenta o vetor unitário normal à superfície  $S_a$  aproxima o vetor unitario na direção radial cartesiana, independente da diferença finita entre a posição da origem e o centro da  $S_a$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \left[ G_g \frac{\partial U_S}{\partial n} - U_S \frac{\partial G_g}{\partial n} \right] dS &= \left[ G_g \left( \frac{\partial U_S}{\partial R} - \frac{i\omega}{c} U_S \right) - U_S \left( \frac{\partial G_g}{\partial R} - \frac{i\omega}{c} G_g \right) \right] R^2 d\Omega \\ &= R G_g \left( \frac{\partial U_S}{\partial R} - \frac{i\omega}{c} U_S \right) R - R U_S \left( \frac{\partial G_g}{\partial R} - \frac{i\omega}{c} G_g \right) R d\Omega \end{aligned}$$

No lado direito, a direção normal tem sido identificada como a direção de aumento de  $R$ . E subtraímos e somamos  $G_g U_S i\omega/c$  para aparecer no formato da segunda condição de Sommerfeld na equação (10), logo cada uma das expressões dentro dos parênteses vezes  $R$  tende para zero quando  $R \rightarrow \infty$ . Os termos  $R U_S$  e  $R G_g$  de acordo com a primeira condição de sommerfeld mantêm-se limitados. Portanto, a integral sobre  $S_a$  no lado direito da equação (15) tende a zero quando  $R \rightarrow \infty$ . Portanto no limite  $R \rightarrow \infty$  podemos escrever

$$U_S(x_g, x_s, \omega) = \int_{\Sigma_D} \left[ G_g \frac{\partial U_S}{\partial n} - U_S \frac{\partial G_g}{\partial n} \right] d\Sigma$$

Agora, note que  $\Sigma_D$  aproxima-se a  $\Sigma$ , logo só precisamos nos preocupar com a convergência da integral sobre esta superfície infinita  $\Sigma$ . Uma demonstração, para o caso em questão  $U_I(x, x_s, \omega) = F(\omega)g(x, x_s, \omega)$ , se encontra em REF appendix Introduction to ray theory and the kirchhoff approximation ?

## A.2 Formas Diferenciais

Iremos deduzir a equação (11) na página 10 usando formas diferenciais e o teorema de Stokes generalizado. O texto a seguir é de autoria do bolsista, numa tentativa de organizar as idéias e conceitos desenvolvidos durante o projeto. E, no fim, o jeito que o bolsista preferiu deduzir a igualdade (11). Para uma leitura mais completa veja o livro *Differential Topology* [2], ou veja no site [1] o material didático de um curso nesta tema.

### A.2.1 Preliminares

Seja  $\Phi(u, v) = (\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))$  uma parametrização da superfície  $S$ . Se for necessário, podemos utilizar diferentes parametrizações com a mesma orientação para realizar a integral. Usaremos  $d\alpha(u, v)$  como um operador diferencial, onde para todo  $\vec{w}_1 \in \mathbb{R}^2$  temos que

$$d\alpha(u, v) \cdot \vec{w}_1 = \frac{\partial \alpha(u, v)}{\partial w_1},$$

análogo para  $\beta$  e  $\gamma$ . O símbolo  $d\alpha$  denomina uma 1-forma. Definimos  $U(u, v) = u$  e  $V(u, v) = v$  como as funções de projeção. Dessa forma, para todo  $(u_1, v_1) \in \mathbb{R}^2$  temos que  $dU(u, v) \cdot (u_1, v_1) = u_1$  e  $dV(u, v) \cdot (u_1, v_1) = v_1$ . O operador  $dU(u, v) \wedge dV(u, v)$ <sup>1</sup> recebe como parametros dois vetores  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbb{R}^2$ , onde  $dU(u, v) \wedge dV(u, v) \cdot (\vec{w}_1, \vec{w}_2) = (dU \cdot \vec{w}_1)(dV \cdot \vec{w}_2) - (dU \cdot \vec{w}_2)(dV \cdot \vec{w}_1)$ , que é a área do paralelogramo formado por  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$ . Se usarmos  $\vec{w}_1 = h(1, 0)$  e  $\vec{w}_2 = h(0, 1)$  temos que  $dU(u, v) \wedge dV(u, v) \cdot (\vec{w}_1, \vec{w}_2) = h^2$  a área do quadrado formado por  $\vec{w}_2$  e  $\vec{w}_1$ . Usando os mesmos  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$ ,  $d\alpha(u, v) \wedge d\beta(u, v) \cdot (\vec{w}_1, \vec{w}_2) = h^2 \partial_1 \alpha \partial_2 \beta - h^2 \partial_2 \alpha \partial_1 \beta$ , que é a área do paralelogramo formado pelos vetores  $(\partial_u \alpha, \partial_u \beta)h$  e  $(\partial_v \alpha, \partial_v \beta)h$ . Uma aproximação para um elemento de área da superfície parametrizada é a área do paralelogramo formado pelos vetores  $(\partial_u \alpha, \partial_u \beta, \partial_u \gamma)h$  e  $(\partial_v \alpha, \partial_v \beta, \partial_v \gamma)h$ , como sabemos, até pelo uso de determinantes, existe uma forma de relacionar este elemento de área da superfície  $S$ , e as áreas projetadas de  $S$  como  $(h^2 \partial_u \alpha \partial_2 \beta - h^2 \partial_2 \alpha \partial_1 \beta)$ , um elemento de área projetado no plano  $(x, y)$ .

E agora para exemplificar como integrar formas: Na integral de Riemann, de uma fun-

---

<sup>1</sup>Onde “ $df \wedge dg$ ” é conhecido como o produto tensorial, ou *wedge product*, entre as formas  $df$  e  $dg$

ção  $F$  definido no  $\mathbb{R}^2$ , construímos um rede de retângulos, cujos comprimentos das laterais são  $h_1$  e  $h_2$ ,  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ , e para cada retângulo escolhemos um  $(u, v)$  nele contido e somamos  $F(u, v)h_1h_2$  para todo retângulo e depois, fazemos os limites  $h_1 \rightarrow 0$  e  $h_2 \rightarrow 0$ . Para calcularmos uma integral com formas, no lugar de cada  $F(u, v)h_1h_2$  somamos  $F(u, v)dU \wedge dV \cdot ((1, 0)h_1, (0, 1)h_2) = f(u, v)h_1h_2$ . É claro que neste caso o valor da integral será o mesmo. Porém, a integral também terá o mesmo valor se no lugar de todo  $F(u, v)dU \wedge dV \cdot ((1, 0)h_1, (0, 1)h_2)$  substituimos por  $F(u, v)dU \wedge dV \cdot ((\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)h_1, (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)h_2) = h_1h_2$ . Bem, para quaisquer  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2 \in \mathbb{R}^2$  temos que  $dU \wedge dV \cdot (\vec{w}_1, \vec{w}_2)$  é a área do paralelogramo formado por  $\vec{w}_1$  e  $\vec{w}_2$ , assim seria possível integrar sobre uma malha de paralelogramos em vez de uma rede de retângulos. Essa flexibilidade, e outras, permitem uma relação mais simples entre integrais de superfície e volume, além de uma definição de integrais em variedades. Todavia, seria mais formal simplesmente definir o seguinte,

$$\int_D F dU \wedge dV := \int_D F dudv$$

Também definiríamos o equivalente para integrais em três dimensões como as que seguem.

### A.2.2 A Dedução usando Stokes Generalizado

Quando não for afetar a clareza iremos omitir os argumentos, por exemplo  $d\alpha(u, v) = d\alpha$ . Usando o que foi definido acima concluímos que para qualquer forma  $df \wedge df = 0$ , então temos que,

$$\begin{aligned} d\alpha &= \partial_u \alpha \cdot dU + \partial_v \alpha \cdot dV, \quad d\beta = \partial_u \beta \cdot dU + \partial_v \beta \cdot dV \quad \text{e} \quad d\gamma = \partial_u \gamma \cdot dU + \partial_v \gamma \cdot dV \Rightarrow \\ d\alpha \wedge d\beta &= \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)} dU \wedge dV, \quad d\beta \wedge d\gamma = \frac{\partial(\beta, \gamma)}{\partial(u, v)} dU \wedge dV \quad \text{e} \quad d\alpha \wedge d\gamma = \frac{\partial(\alpha, \gamma)}{\partial(u, v)} dU \wedge dV \end{aligned} \quad (18)$$

Agora iremos demonstrar a igualdade (11) na página 10, para tanto primeiro mostraremos que,

$$\int_D [f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g] dX \wedge dY \wedge dZ = \int_{\partial D} f \frac{\partial g}{\partial n} dS \quad (19)$$

Definimos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  como as funções de projeção nos respectivos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Logo,  $X(x, y, z) = x$  e  $dX(x, y, z) \cdot (x_1, y_1, z_1) = x_1$ , o analogamente vale para  $Y$  e  $Z$ . E temos

que para todo  $\nu_1, \nu_2$  e  $\nu_3 \in \mathbb{R}^3$ ,  $dX \wedge dY \wedge dZ \cdot (\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (dX \cdot \nu_1) \cdot (dY \wedge dZ \cdot (\nu_2, \nu_3)) + (dX \cdot \nu_2) \cdot (dY \wedge dZ \cdot (\nu_3, \nu_1)) + (dX \cdot \nu_3) \cdot (dY \wedge dZ \cdot (\nu_1, \nu_2)) = \det |\nu_1 \ \nu_2 \ \nu_3|$  que é o volume do paralelepípedo formado por estes vetores. Resulta disso que  $dX \wedge dY \wedge dZ = (dX \wedge dY) \wedge dZ = dX \wedge (dY \wedge dZ)$ .

Usaremos a parametrização  $\Phi(u, v) = (\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))$  para  $S$ . Então temos que,  $dS = |\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi| dU \wedge dV$  e,

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot \frac{\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi}{|\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi|} \Rightarrow f \frac{\partial g}{\partial n} dS = f \nabla g \cdot (\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi) dU \wedge dV,$$

e

$$\begin{aligned} \nabla g \cdot (\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi) dU \wedge dV &= [\partial_x g \frac{\partial(\beta, \gamma)}{\partial(u, v)} + \partial_y g \frac{\partial(\gamma, \alpha)}{\partial(u, v)} + \partial_z g \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)}] dU \wedge dV \\ &= \partial_x g d\beta \wedge d\gamma + \partial_y g d\gamma \wedge d\alpha + \partial_z g d\alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Este último igualdade resulta da equação (18). Note que  $d\alpha \cdot \vec{w}_1$  é quanto a coordenada  $x$  se alterou por causa de uma variação ao longo de  $\vec{w}_1$ , ou seja,  $d\alpha \cdot \vec{w}_1 = dX \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial w_1}$ , e a conta conferi. Logo,

$$\begin{aligned} \partial_z g(\Phi(u, v)) d\alpha(u, v) \wedge d\beta(u, v) \cdot (\vec{w}_1, \vec{w}_2) &= \\ \partial_z g(\alpha, \beta, \gamma) dX(\Phi(u, v)) \wedge dY(\Phi(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial w_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} \right) &= \\ \partial_z g(x, y, z) dX(x, y, z) \wedge dY(x, y, z) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial w_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_A \partial_z g d\alpha \wedge d\beta = \int_{\partial D} \partial_z g(x, y, z) dX \wedge dY$$

Resumindo, para manter esta igualdade, para cada  $d\alpha(u, v) \wedge d\beta(u, v) \cdot (\vec{w}_1, \vec{w}_2)$  que somamos na integral em  $A$  precisamos somar  $dX(\Phi) \wedge dY(\Phi) \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial w_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} \right)$  na integral em  $\partial D$ , ao realizar os limites das integrais. Onde  $A$  é o domínio da parametrização e  $\partial D$  é composto por vetores tangentes à superfície  $\Phi$ .

Do teorema de Stokes generalizado temos o seguinte resultado razoavelmente intuitivo,

$$\int_D dF \wedge dS = \int_{\partial D} F dS$$

Onde  $\partial D$  é superfície fechada e  $D$  é o volume limitado por esta superfície. Seguindo o raciocínio acima temos que  $F = \partial_x g dY \wedge dZ + \partial_y g dZ \wedge dX + \partial_z g dX \wedge dY$  e  $dF = \partial_x F dX + \partial_y F dY + \partial_z F dZ$  ao em vez da versão restrito no domínio da parametrização:  $dF = \partial_\alpha F d\alpha + \partial_\beta F d\beta + \partial_\gamma F d\gamma$ . Assim temos que  $F = f \partial_x g d\beta \wedge d\gamma + f \partial_y g d\gamma \wedge d\alpha + f \partial_z g d\alpha \wedge d\beta$  e  $d(f \partial_x g) \wedge dY \wedge dZ = (\partial_x f \partial_x g dX + f \partial_{xx} g dX) \wedge (dY \wedge dZ) + (\dots) dY \wedge (dY \wedge dZ) + (\dots) dZ \wedge (dY \wedge dZ) = (\partial_x f \partial_x g + f \partial_{xx} g) dX \wedge dY \wedge dZ$ . Os dois últimos termos são nulos porque, como definido acima,  $dY \wedge dY \wedge dZ = (dY \wedge dY) \wedge dZ = -dY \wedge dY \wedge dZ \Rightarrow dY \wedge dY \wedge dZ = 0$  e  $dZ \wedge (dY \wedge dZ) = -dZ \wedge (dZ \wedge dY) = (dZ \wedge dZ) \wedge dY \Rightarrow dZ \wedge dY \wedge dZ = 0$ , ou seja, se aplicamos uma dessas 3-formas a três vetores quaisquer o resultado não iria contribuir em nada a medir o volume entre esses três vetores. Note que  $dX \wedge dY \wedge dZ$  aplicado a três vetores quaisquer é o volume total do paralelepípedo formado por esses vetores. Fazendo a mesma conta para  $d(f \partial_y g) \wedge dZ \wedge dX$  e  $d(f \partial_z g) \wedge dX \wedge dY$  resulta que,

$$\begin{aligned} \int_D [\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g] dX \wedge dY \wedge dZ &= \int_{\partial D} f (\partial_x g dY \wedge dZ + \partial_y g dZ \wedge dX + \partial_z g dX \wedge dY) \\ &= \int_A f \nabla g \cdot (\partial_u \Phi \times \partial_v \Phi) dU \wedge dV = \int_{\partial D} f \frac{\partial g}{\partial n} dS \end{aligned}$$

Agora deixando para trás formas e lembrando o operador  $\mathcal{L}$  da equação 8 temos pelo resultado acima que,

$$\int_D [H \mathcal{L} U + \nabla H \cdot \nabla U - \frac{\omega^2}{c^2} H U] dV = \int_D [H \nabla^2 U + \nabla H \cdot \nabla U] dV = \int_{\partial D} \left[ H \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS$$

então,

$$\int_D [H \mathcal{L} U - U \mathcal{L} H] dV = \int_{\partial D} \left[ H \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial H}{\partial n} \right] dS$$

## Referências

- [1] R. Sjamaar, Lecture notes on Manifolds and Differential Forms at [www.math.cornell.edu/~sjamaar/classes/321/notes.html](http://www.math.cornell.edu/~sjamaar/classes/321/notes.html).
- [2] V. Guillemin e A. Pollack, *Differential Topology* Prentice Hall, 1974.

[3] Norman Bleistein, *Mathematical Methods for Wave Phenomena* Academic Press, 1984.