Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Freiburg im Breisgau

Wachstum von endlich erzeugten Gruppen

von
Claas E. Röver

vorgelegt als Diplomarbeit
bei Herrn Prof. Dr. Otto H. Kegel
im April 1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Grundlagen **4**
- 1.1 Wachstum von Folgen 4
- 1.2 Wachstum in Gruppen 6
- 1.3 Kranzprodukte 9

2 Gruppen mit polynomialem Wachstum **11**
- 2.1 Nilpotente Gruppen 11
- 2.2 Fast nilpotente Gruppen 14
- 2.3 Lokale Wachstumskriterien 15
- 2.4 Residuell endliche Gruppen I 16

3 Die Wachstumsalternative **17**
- 3.1 Auflösbare Gruppen 18
- 3.2 Andere Klassen 20
- 3.3 Residuell endliche Gruppen II 20

4 Intermediäres Wachstum in Gruppen **22**
- 4.1 Überblick 22
- 4.2 Eine intermediär wachsende Gruppe 22
- 4.3 Variationen 26
- 4.4 Residuell endliche-p Gruppen und ihre assoziierten Algebren . . . 28

5 Wachstumstyperhaltende Einbettungssätze **32**
- 5.1 Werkzeug 32
- 5.2 Beweis von Satz 18 35

Einleitung

In der Algebra ist es üblich, einer Struktur eine "Größe" zuzuordnen, die bis zu einem gewissen Grad die Struktur kennzeichnet. Für Vektorräume ist so eine Größe die Dimension. In diesem Fall ist die Struktur durch die Kardinalität der Dimension schon bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, wenn der Körper derselbe ist. Für endlich erzeugte Gruppen ist das Wachstum eine solche Größe, allerdings ist der Einfluß des Wachstums auf die Struktur der Gruppe bei weitem nicht so stark. Genauer: In d er von $g_1, \ldots, g_d \in \mathbf{G}$ erzeugten Gruppe $\mathbf{G}$ ist die Anzahl w_n der Elemente, die sich als Produkt von höchstens n Faktoren $g_i^{\pm 1}$ ausdrücken lassen eine monoton wachsende Folge. Schon jetzt kann man sehen, daß die Gruppe genau dann en dlich ist, wenn diese Folge konstant wird. Da diese Definition offensichtlich von dem gewählten Erzeugersystem abhängt, ist es sinnvoll auf der Menge der monoton wachsenden Folgen eine Äquivalenzrelation zu erklären, so daß die Äquivalenzklasse der Folge w_n unabhängig vom Erzeugersystem wird. Indem man für zwei solche Folgen w und w' die Relation $w \preceq w'$ definiert durch: es gibt Konstanten $C, K > 0$ mit $w_n \leq C w'_{Kn}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und dann w und w' als äquivalent ($w \sim w'$) betrachtet, wenn $w \preceq w'$ und $w' \preceq w$ gelten, hat man das gewünschte Ergebnis. Die Äquivalenzklasse der Folge w_n ist dann das Wachstum der Gruppe.

Betrachtet man das Wachstum bezüglich eines symmetrischen (d.h. abgeschlossen unter Inversenbildung) Erzeugersystems der Kardinalität d, dann ist sofort klar, daß $w_n \leq d^n$ gilt. Eine grobe Unterteilung der Wachstümer von Gruppen in drei Typen is t dann die folgende: Die Folge w wächst polynomial, wenn es ein $d \geq 0$ gibt, mit $w \sim n^d$. Gilt $w \sim a^n$ für ein $a > 1$, dann hat w exponentielles Wachstum und wenn weder $a^n \preceq w$ noch $w \preceq n^d$ für alle $d \geq 0$, dann wächst w intermediär. Wenn im folgenden von Gruppen die Rede ist, wird vorausgesetzt, daß sie endlich erzeugt sind.

Durch die Arbeiten von Milnor und Wolf [27, 28, 45], in denen gezeigt wurde, daß fast nilpotente Gruppen, polynomiales Wachstum haben, und auflösbare Gruppen niemals intermediär wachsen, wurde das Interesse am Wachstum von Gruppen sehr stark g efördert. Es folgte eine Arbeit von Bass [3], die den genauen Grad des Wachstums von nilpotenten Gruppen in Abhängigkeit von der Struktur der Faktoren der absteigenden Zentralreihe angibt. Dieses Ergebnis wird in Kapitel 2 bewiesen. Wenig späte r gelang Gromov [16] die vollständige Charakterisierung der Gruppen mit polynomialem Wachstum, in dem er zeigte, daß dies genau die fast nilpotenten Gruppen sind. Veranlaßt durch das oben erwähnte Resultat für auflösbare Gruppen, stellte Milnor das jetzt nach ihm benannte Problem [29]: *Hat jede endlich erzeugte Gruppe entweder polynomiales oder exponentielles Wachstum ?*

Bevor Grigorchuk in [11] Gruppen mit intermediärem Wachstum konstruierte, gab es noch einige Sätze, die auf eine positive Antwort hindeuteten. Die Gruppen mit Wachstumsalternative, d.h. die Antwort auf Milnors Problem ist für diese Gruppen ja, s ind Gegenstand des dritten Kapitels dieser Arbeit. Es wird dort gezeigt, daß eine auflösbare Gruppe schon dann fast nilpotent ist, wenn sie keine freie Unterhalbgruppe mit zwei Erzeugern hat, was eine etwas schwächere Voraussetzung als subexponentielle s Wachstum ist.

Damit Milnors Problem hier nicht ungelöst bleibt, wird eines der einfachsten Beispiele von Grigorchuk vorgestellt. Hier sollte darauf hingewiesen werden, daß eine sehr ähnliche Gruppe schon von Alëshin zur Lösung des Burnside Problems angegeben wurde [1]. Daß auch diese Gruppen intermediäres Wachstum haben, wurde von Merzlyakov [26] bewiesen. Alle von Grigorchuk konstruierten Torsionsgruppen sind residuell endliche-p Gruppen. Zu solchen Gruppen lassen sich sowohl graduierte assoziati ve als auch graduierte Lie-p-Algebren assoziieren, deren Studium sich schon mehrmals als sehr nützlich in Bezug auf die Gruppentheorie erwiesen hat, z.B. macht Zelmanov in seiner Lösung des eingeschränkten Burnside Problems [46] intensiven Gebra uch von Sätzen über Lie-Algebren. Deshalb ist es von Interesse das Wachstum einer Gruppe "irgendwie" in den assoziierten Algebren wieder zu finden. Dies wird am Ende des vierten Kapitels in Anlehnung an eine Arbeit von Grigorchuk [14] getan.

Den Abschluß dieser Arbeit bildet ein Kapitel, in dem einer Reihe von Arbeiten [18, 19, 30, 33, 43], die sich mit der Frage beschäftigen, ob sich eine abzählbare Gruppe mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ in eine von zwei Elementen erzeugte Gruppe m it der Eigenschaft $\mathcal{E}$ einbetten läßt, ein weiteres Resultat hinzugefügt wird. Dort wird gezeigt, daß sich jede endlich erzeugte Gruppe mit endlicher Kommutator-Faktorgruppe in eine 2-erzeugte Gruppe mit demselben Wachstumstyp einbetten läßt . Es ergibt sich dabei, daß gleichzeitig auch die Eigenschaften residuell endlich, π-Gruppe und konjugierten-separierend erhalten bleiben.

Jetzt folgt eine Übersicht über die Gliederung dieser Arbeit. Im ersten Kapitel werden das Wachstum von monoton wachsenden Folgen und endlich erzeugten Gruppen definiert und dann einige grundlegende Eigenschaften darüber gesammelt. Dann folgt eine kurze Einführung des Kranzproduktes, welches aber erst Kapitel 5 wi eder gebraucht wird. Das zweite Kapitel behandelt Gruppen mit polynomialem Wachstum und die Frage nach lokalen Wachstumskriterien. Es wird ähnlich wie bei Bass [3] gezeigt, daß endlich erzeugte fast nilpotente Gruppen polynomiales Wachstum haben . Der Satz von Gromov [16] wird nur zitiert, da er bisher keinen kurzen Beweis hat. Schließlich wird für residuell endliche Gruppen noch eine kombinatorische Bedingung angegeben, die polynomiales Wachstum charakterisiert. In Kapitel 3 werden einige Klassen von Gruppen genannt, in denen es keine endlich erzeugten Gruppen mit intermediärem Wachstum gibt. Dies wird für auflösbare Gruppen auch bewiesen. Für residuell endliche Gruppen ergibt sich dann aus einem Resultat von Kim und Rhemtulla [22] eine kombinatorische Bedingung, aus der die Wachstumsalternative folgt. Eine negative Antwort auf Milnors Frage liefert dann das vierte Kapitel. Außerdem wird dort für residuell endliche-p Gruppen, die nicht subexponenti ell wachsen, eine Art lokales Kriterium für polynomiales Wachstum bewiesen. Im letzten Kapitel wird ein wachstumstyp-erhaltender Einbettungssatz bewiesen.

Hier möchte ich die Gelegenheit nutzen, mich bei Herrn Prof. Dr. Otto H. Kegel für das Interesse an dieser Arbeit, sowie die überaus anregenden und meistens sehr zeitintensiven persönlichen Gespräche zu bedanken.

Hinweis: Die Notation ist im wesentlichen Standard, wie z.B. in Robinson [34]. Dennoch gebe ich einige Schreibweisen hier an:

$\|X\|$	die Kardinalität der Menge X
$\langle X \rangle$	die von X erzeugte Gruppe
$g^{-1}h^{-1}gh = [g,h]$	der Kommutator der Gruppenelemente g, h
$\langle [x,y] \mid x \in X,\, y \in Y \rangle = [X,Y]$	
$g^h = h^{-1}gh$	für Gruppenelemente g, h
x^ϕ	das Bild von x unter der Abbildung ϕ
$\prod_{i \in I} X_i$	das cartesische Produkt der X_i
$\bigoplus_{i \in I} X_i$	das direkte Produkt der X_i

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die nötigen Begriffe, sowie einige ihrer Eigenschaften, die später gebraucht werden, gesammmelt.

1.1 Wachstum von Folgen

Sei $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen f_n. Mit $\mathcal{F}$ bezeichne ich die Menge aller solcher Folgen, auf der die partielle Ordnung $\preceq$ wie folgt definiert ist: $f \preceq g = (g_n)$ genau dann, wenn es Konstanten $C, K > 0$ gibt, so daß $f_n \le C g_{Kn}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Falls $f \preceq g$ und $g \preceq f$ gilt, heißen f und g äquivalent (schreibe $f \sim g$) und die Äquivalenzklasse $[f]$ von $f \in \mathcal{F}$ heißt auch *Wachstum* von f (es ist leicht einzusehen, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist). Wenn $f \preceq g$ aber nicht $f \sim g$ gilt, wird dies durch $f \prec g$ ausgedrückt. Die partielle Ordnung, die $\preceq$ auf den Äquivalenzklassen induziert, wird ebenfalls mit $\preceq$ bezeichnet.

Desweiteren werden durch $(f+g)_n = f_n + g_n$ und $(fg)_n = f_n g_n$, sowie $[f]+[g] = [f+g]$ und $[f][g] = [fg]$ die Addition bzw. Multiplikation von Folgen und deren Wachstum definiert.
Hinweis: Für $f, g \in \mathcal{F}$ mit $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreibe ich auch $f_n \preceq g_n$ oder $f \preceq g_n$ bzw. $f_n \preceq g$ anstelle von $f \preceq g$ und entsprechende Ausdrücke für $f \sim g$. Dabei kann keine Verwechselung von Folgen mit Folgengliedern auftreten, da Vergleiche zwischen Folgengliedern immer mit den Zeichen $\le, <, \ge, >$ oder $=$ notiert werden.

Eine Folge $f \in \mathcal{F}$ hat *exponentielles* Wachstum, wenn es eine Konstante $a > 1$ gibt, so daß $f \sim a^n$ gilt. Man beachte, daß $a^n \sim 2^n$ für alle $a > 0$ gilt. Gibt es ein $d \ge 0$ mit $f \sim n^d$, dann hat f *polynomiales Wachstum vom Grad d*. Hier gilt $n^d \prec n^{d'}$, falls $d < d'$. Gilt $n^d \prec f \prec 2^n$ für alle $d \in \mathbb{N}$, so hat f *intermediäres* Wachstum. In 1.2 wird sich ergeben, daß alle in dieser Arbeit betrachteten Folgen einer dieser drei Bedingungen genügen, was im Allgemeinen nicht gilt, wie das Beispiel $f_n = e^{e^n}$ zeigt. Folgen, die polynomiales oder intermediäres Wachstum haben, heißen auch *subexponentiell* wachsend. Der *Wachstumstyp* $T(f)$ ist dann eines der drei Symbole $\mathcal{E}, \mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{I}$, die für exponentielles, polynomiales bzw. intermediäres Wachstum stehen.

In dieser Arbeit wird das folgende Lemma oft benutzt, um den Wachstumstyp einer Folge zu bestimmen.

Lemma 1 *Sei $f \in \mathcal{F}$ mit $f_{n+m} \leq f_n f_m$ und $\lambda_f = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n}$, dann gelten*

a) λ_f existiert, d.h. ist endlich

b) $T(f) = \mathcal{E} \Longleftrightarrow \lambda_f > 1$

c) $T(f) \in \{\mathcal{I}, \mathcal{P}\} \Longleftrightarrow \lambda_f = 1$

Beweis: Ein Beweis von a) steht z.B. in [17] und $\lambda_f \geq 1$ ist klar.
Zu b): Wenn $f \sim e^n$ ist, gilt $\sqrt[Kn]{Cf_{Kn}} \geq \sqrt[Kn]{e^n} = \sqrt[K]{e} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\lambda_f > 1$. Ist $\lambda_f > 1$, dann gilt $f_n \geq (\lambda_f - \varepsilon)^n$ mit $0 < \varepsilon < |\lambda_f - 1|$ und alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. Also gibt es eine Konstante C mit $Cf_n \geq (\lambda_f - \varepsilon)^n$ für alle n, woraus $f_n \succeq e^n$ folgt. Da eine Folge mit $f_{n+m} \leq f_n f_m$ auch $f_n \leq f_1^n$ erfüllt, also höchstens exponentiell wächst, folgt b). Teil c) ist nun eine direkte Folgerung aus b), q.e.d.

Feinere Differenzierungen als der Wachstumstyp, die nur zur Vollständigkeit angegeben werden, sind die *Gel'fand-Kirillov-Dimension*, welche durch

$$dim[f] = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln f(n)}{\ln n} = \inf\{d \mid [f] \leq [n^d]\}$$

definiert ist, und die *Superdimension*, die durch

$$DIM[f] = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln\ln f(n)}{\ln n} = \inf\{\alpha \mid [f] \leq [2^{n^\alpha}]\}$$

gegeben ist.

Zu jeder Folge $f \in \mathcal{F}$ ist die *erzeugende Funktion* durch

$$H_f(x) = \sum_{n\geq 0} (f_n - f_{n-1})x^n$$

gegeben, wobei $f_{-1} = 0$ gesetzt wird. Die erzeugende Funktion ist oft nützlich, um Sachverhalte kurz zu formulieren (vergl. z.B. Lemma 6). Ist andererseits eine formale Potenzreihe $H(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ mit nicht-negativen Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so wird ihr Wachstum durch das Wachstum der Folge f mit $f_n = a_0 + \ldots + a_n$ definiert.

Weil dies nicht alle Autoren tun, gebe ich hier noch ein Lemma an, das zeigt, wie das "Wachstum" einer Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Wachstum der Folge $s_n = \sum_{i=0}^n a_i$ zusammenhängt. Dabei ist darauf hinzuweisen, daß die Folge a nicht notwendig monoton wächst. Ersetzt man jedoch a durch a' mit $a'_0 = a_0$ und $a'_n = \max\{a'_{n-1}, a_n\}$, dann ist a' monoton wachsend und es gilt $a_n \leq a'_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere ist a' die kleinste monotone Folge mit dieser Eigenschaft, in dem Sinne, daß für jede monoton wachsende Folge f mit $a_n \leq f_n$ auch $a'_n \leq f_n$ gilt.

Lemma 2 *Mit den gleichen Bezeichnungen gelten*

i) $a'_n \preceq n^d \Longrightarrow s_n \preceq n^{d+1}$

ii) $a'_n \prec e^n \Longleftrightarrow s_n \prec e^n$

Beweis: i) Sei $a'_n \leq Cn^d$. Dann ist $s_n \leq \sum_{i=0}^n a'_i \leq C\sum_{i=0}^n i^d \leq C(n+1)n^d$, also $s_n \preceq n^{d+1}$.
ii) Sei $a'_n \prec e^n$, so folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)a'_n} \leq 1$, denn es gelten $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ und nach Lemma 1 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a'_n} = 1$. Es ist klar, daß $a_n \leq s_n$ gilt, woraus mit dem oben gesagten $a'_n \leq s_n$ folgt, was das Lemma beweist.

1.2 Wachstum in Gruppen

Sei nun $\mathbf{G}$ eine endlich erzeugte Gruppe und $\mathbf{E}$ ein endliches Erzeugersystem von $\mathbf{G}$, d.h. jedes Element $g \in \mathbf{G}$ läßt sich als $g = e_1^{\epsilon_1} e_2^{\epsilon_2} \cdots e_n^{\epsilon_n}$ schreiben, wobei $n \in \mathbb{N}$, $e_i \in \mathbf{E}$ und $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ für $1 \leq i \leq n$. Dies kann man auch so ausdrücken: Jedes Element $g \in \mathbf{G}$ ist ein (endliches) Wort in dem Alphabet $\mathbf{E}^{\pm 1} = \mathbf{E} \cup \mathbf{E}^{-1}$.

Außerdem ist es sinnvoll, das Einselement von $\mathbf{G}$ mit dem leeren Wort zu identifizieren, denn dann lässt sich das "Aneinanderhängen" von Wörtern als Multiplikation interpretieren. Die *Länge* $l(w)$ des Wortes $w = e_1 \cdots e_n$, $e_i \in \mathbf{E}^{\pm 1}$ ist gleich n, und die *Länge* des Elementes $g \in \mathbf{G}$ bezüglich des Erzeugersystems $\mathbf{E}$ ist definiert durch $l_{\mathbf{E}}(g) = \min\{l(w) \mid g = w\}$. Das Einselement hat somit die Länge Null. Sei $B_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) = \{g \in \mathbf{G} \mid l(g) \leq n\}$ und $w_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) = |B_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G})|$, wobei ich auch B_n bzw. w_n schreibe, wenn die Gruppe und das Erzeugersystem feststehen. Das Wachstum der Folge $w_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G})$ heißt dann *Wachstum von* $\mathbf{G}$ *bezüglich* $\mathbf{E}$.

Da ein Wort der Länge n aus einem Wort der Länge $n-m$ durch Anhängen eines Wortes der Länge m entsteht, ergibt sich $w_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) \leq w_{n-m}^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) w_m^{\mathbf{E}}(\mathbf{G})$ und mit Lemma 1 folgt $w_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) \preceq e^n$.

Ist $\mathbf{F}$ ein weiteres Erzeugersystem von $\mathbf{G}$, dann gibt es wegen $\mathbf{G} = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n^{\mathbf{E}}$ ein $K \in \mathbb{N}$, mit $\mathbf{F}^{\pm 1} \subset B_K^{\mathbf{E}}$ und somit $B_n^{\mathbf{F}} \subset B_{Kn}^{\mathbf{E}}$ für alle $n \geq 0$. Hieraus folgt aber sofort $w_n^{\mathbf{F}} \preceq w_n^{\mathbf{E}}$ und ein analoges Argument liefert $w_n^{\mathbf{E}} \preceq w_n^{\mathbf{F}}$. Die beiden letzten Absätze beweisen das folgende

Lemma 3 *Das Wachstum einer endlich erzeugten Gruppe ist unabhängig vom Erzeugersystem und höchstens exponentiell.*

Ab jetzt bezeichne $w(\mathbf{G})$ das Wachstum der endlich erzeugten Gruppe $\mathbf{G}$, und wenn von dem Wachstum einer Gruppe die Rede ist, soll dies immer bedeuten, daß die Gruppe endlich erzeugt ist. Aus dem Argument vor Lemma 3 folgt auch, daß das Wachstum $w(\mathbf{U})$ einer endlich erzeugten Untergruppe $\mathbf{U} \subset \mathbf{G}$, der endlich erzeugten Gruppe $\mathbf{G}$ durch $w(\mathbf{G})$ nach oben beschränkt ist. Es gilt sogar:

Lemma 4 *Ist* $\mathbf{G}$ *eine endlich erzeugte Gruppe und* $\mathbf{U}$ *eine Untergruppe von* $\mathbf{G}$ *mit endlichem Index in* $\mathbf{G}$*, dann haben* $\mathbf{G}$ *und* $\mathbf{U}$ *dasselbe Wachstum.*

Beweis: Sei T eine Transversale zu $\mathbf{U}$ in $\mathbf{G}$ mit $1 \in T$ und $\overline{} : \mathbf{G} \longrightarrow T$ die Abbildung, die jedem $g \in \mathbf{G}$ seinen Repräsentanten $\overline{g} \in T$ zuordnet. Weiter sei $\mathbf{E}$ ein endliches Erzeugersystem von $\mathbf{G}$ und zu $g \in \mathbf{G}$ ist $u_g \in \mathbf{U}$ das eindeutig bestimmte Element aus $\mathbf{U}$ mit $g = \overline{g}u_g$. Setze $F = \{u_{et} \mid e \in \mathbf{E},\, t \in T\}$.
Behauptung: $\mathbf{U}$ wird von F erzeugt.
Ist $u = e_1e_2\cdots e_n \in \mathbf{U}$ mit $e_i \in \mathbf{E}^{\pm 1}$, dann gilt $u = u_{e_1e_2\cdots e_n}$. Nun folgt aber aus

$$gg' = g\overline{g'}u_{g'} = \overline{\overline{g\overline{g'}}}u_{g\overline{g'}}u_{g'} = \overline{gg'}u_{g\overline{g'}}u_{g'}$$

schon $u_{gg'} = u_{g\overline{g'}}u_{g'}$ und mit Induktion auch

$$u_{e_1e_2\cdots e_n} = u_{e_1\overline{e_2\cdots e_n}}u_{e_2\overline{e_3\cdots e_n}}\cdots u_{e_{n-1}\overline{e_n}}u_{e_n} \tag{1.1}$$

Es bleibt also noch zu zeigen, daß $u_{e^{-1}t} \in \langle F\rangle$ ist, für $e \in \mathbf{E}$, $t \in T$. Dies folgt aus

$$1 = u_t = u_{ee^{-1}t} = u_{\overline{ee^{-1}t}}u_{e^{-1}t}u_t,$$

denn dann ist $u_{e^{-1}t} = u^{-1}_{\overline{ee^{-1}t}} \in F^{-1}$ $\quad(*)$, was die Behauptung beweist.
Ist nun $g \in \mathbf{G}$ mit $l_{\mathbf{E}}(g) \leq n$, so folgt aus (1.1) und $(*)$, daß $l_F(u_g) \leq n$ und damit $w_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) \leq |T|w_n^F(\mathbf{U})$, q.e.d.
Bemerkung: Der Beweis zeigt, daß eine Untergruppe von endlichem Index in einer endlich erzeugten Gruppe selbst endlich erzeugt ist, was in dieser Arbeit häufig benutzt wird.

Um eine Aussage über das Wachstum von homomorphen Bildern zu machen, definiere ich das *Wachstum* $w_{\mathbf{E}}(T)$ *einer Teilmenge* $T \subset \mathbf{G}$ *bezüglich des endlichen Erzeugersystems* $\mathbf{E}$ der Gruppe $\mathbf{G}$ als das Wachstum der Folge $t_n^{\mathbf{E}} = |T \cap B_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G})|$. Dann gilt für $S \subset T \subset \mathbf{G}$ offensichtlich $w(S) \preceq w(T)$.

Lemma 5 *Sei* $\mathbf{G}$ *eine endlich erzeugte Gruppe und* $\mathbf{H}$ *ein homomorphes Bild von* $\mathbf{G}$*. Dann ist das Wachstum von* $\mathbf{H}$ *durch das Wachstum von* $\mathbf{G}$ *nach oben beschränkt.*

Beweis: Sei $\mathbf{E}$ ein endliches Erzeugersystem von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{F}$ die freie Gruppe auf der Menge $\mathbf{E}$, sowie $\mathbf{N}$ der Relationennormalteiler der kanonischen Projektion von $\mathbf{F}$ auf $\mathbf{G}$. Es gilt dann $l_{\mathbf{E}}^{\mathbf{G}}(g) = min\{l_{\mathbf{E}}^{\mathbf{F}}(f) \mid f\mathbf{N} = g\mathbf{N}\}$, oder anders gesagt: Wenn T eine *minimale* Transversale zu $\mathbf{N}$ in $\mathbf{F}$ ist, d.h. $l(t) \leq l(tn)$ für alle $n \in \mathbf{N}$, dann ist $w_{\mathbf{E}}(T) = w(\mathbf{G})$. Ist $\mathbf{M}$ der Relationennormalteiler der Projektion von $\mathbf{F}$ auf $\mathbf{H}$, so ist $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$ und jede Restklasse von $\mathbf{M}$ in $\mathbf{F}$ ist Vereinigung von Restklassen von $\mathbf{N}$ in $\mathbf{F}$. Sei S eine minimale Transversale zu $\mathbf{M}$ in $\mathbf{F}$ und $s \in S$, so muss s auch minimal in $s\mathbf{N}$ sein, woran man erkennt, daß sich S als Teilmenge von T wählen läßt. Alles zusammen ergibt nun $w(\mathbf{H}) = w(S) \preceq w(T) = w(\mathbf{G})$, q.e.d.

Für das direkte Produkt von zwei endlich erzeugten Gruppen lässt sich das Wachstum wie folgt angeben. Dazu bezeichne $H_{\mathbf{G}}^{\mathbf{E}}(x)$ die erzeugende Funktion von $w_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G})$. Hier ist es notwendig, das Erzeugersystem $\mathbf{E}$ anzugeben, denn zwei verschiedene Erzeugersysteme liefern i.A. auch verschiedene erzeugende Funktionen, obwohl das Wachstum dasselbe ist.

Lemma 6 *Seien* $\mathbf{G}$ *und* $\mathbf{H}$ *endlich erzeugte Gruppen mit Erzeugersystemen* $\mathbf{E}$ *bzw.* $\mathbf{F}$, *dann gelten*

(i) $H_{\mathbf{G}\times\mathbf{H}}^{\mathbf{E}\cup\mathbf{F}}(x) = H_{\mathbf{G}}^{\mathbf{E}}(x)H_{\mathbf{H}}^{\mathbf{F}}(x)$

(ii) $w(\mathbf{G}\times\mathbf{H}) \preceq w(\mathbf{G})w(\mathbf{H})$

Beweis: Es ist klar, daß $\mathbf{D} = \mathbf{G}\times\mathbf{H}$ von $\mathbf{X} = \mathbf{E}\cup\mathbf{F}$ erzeugt wird und jedes Element $d \in \mathbf{D}$ sich eindeutig in der Form $d = gh$ mit $g \in \mathbf{G}$, $h \in \mathbf{H}$ schreiben läßt und außerdem $l_{\mathbf{X}}(d) = l_{\mathbf{E}}(g) + l_{\mathbf{F}}(h)$ gilt. Sei $s_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) = w_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) - w_{n-1}^{\mathbf{E}}(\mathbf{G})$ die Anzahl der Elemente der Länge genau n bezüglich $\mathbf{E}$, dann folgt

$$s_n^{\mathbf{X}}(\mathbf{D}) = \sum_{i=0}^{n} s_i^{\mathbf{E}}(\mathbf{G})s_{n-i}^{\mathbf{F}}(\mathbf{H})$$

Aussage (i) folgt nun aus $H_{\mathbf{G}}^{\mathbf{E}}(x) = \sum_{n\geq 0} s_n(\mathbf{G})x^n$.
Da für jedes Element $d = gh$ mit $l_{\mathbf{X}}(d) \leq n$ auch $l_{\mathbf{E}}(g) \leq n$ und $l_{\mathbf{F}}(h) \leq n$ gelten muß, folgt $w_n^{\mathbf{X}}(\mathbf{D}) \leq w_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G})w_n^{\mathbf{F}}(\mathbf{H})$ und daraus (ii).

Bemerkung: Mit Lemma 1 und einer einfachen Induktion ergibt sich, daß das direkte Produkt von endlich vielen subexponentiell (polynomial) wachsenden Gruppen selbst subexponentiell (polynomial) wächst, wenn man bedenkt, dass das Produkt zweier konvergenter Folgen wieder konvergiert und zwar gegen das Produkt der Grenzwerte (bzw. weil das Produkt von endlich vielen Polynomen wieder ein Polynom ist).

Beispiele

I) Das einfachste Beispiel einer unendlichen Gruppe ist wohl die unendlich-zyklische Gruppe $\mathbf{Z}_\infty = \langle z\rangle$. Es ist klar, daß $w_n(\mathbf{Z}_\infty) = 2n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bezüglich des Erzeugersystems $\{z\}$ gilt, d.h. $\mathbf{Z}_\infty$ hat lineares Wachstum. Die erzeugende Funktion ist dann

$$H_{\mathbf{Z}_\infty}^{\{z\}}(x) = 1 + \sum_{i\geq 1} 2x^i = \frac{1+x}{1-x}$$

II) Sei $\mathbf{A} = \bigoplus_{i=1}^{r}\mathbf{Z}_\infty = \bigoplus_{i=1}^{r}\langle z_i\rangle$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang r mit Erzeugersystem $\mathbf{E} = \{z_1,\ldots,z_r\}$, dann ergibt eine Induktion mit Hilfe von Lemma 6

$$H_{\mathbf{A}}^{\mathbf{E}}(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^r \qquad \text{und} \qquad w(\mathbf{A}) \preceq n^r$$

Andererseits gilt

$$w_{r\,n}(\mathbf{A}) \geq |\{a = z_1^{i_1}z_2^{i_2}\cdots z_r^{i_r} \mid |i_j| \leq n,\, 1\leq j\leq r\}| \geq (2n+1)^r,$$

da $l(a) \leq \sum_{j=1}^{r}|i_j| \leq r\,n$. Also hat $\mathbf{A}$ polynomiales Wachstum vom Grad r.
III) Ist $\mathbf{F} = \langle a,b\rangle$ eine freie Gruppe vom Rang 2, dann gilt

$$w_n(\mathbf{F}) \geq |\{x_1x_2\cdots x_n \mid x_i \in \{a,b\},\, 1\leq i\leq n\}| \geq 2^n\,,$$

also hat $\mathbf{F}$ exponentielles Wachstum.
Bemerkung: Das Argument aus Beispiel III) zeigt, daß eine Gruppe, die eine freie Unterhalbgruppe in zwei Erzeugern hat, exponentielles Wachstum haben muß.

Zum Abschluß dieses Abschnittes möchte ich noch darauf hinweisen, daß dies nicht die einzige Möglichkeit ist einer endlich erzeugten Gruppe ein Wachstum zuzuordnen. So wird z.B. in [5] die Folge u_n =Anzahl der Untergruppen vom Index $\leq n$ einer endlich erzeugte Gruppen $\mathbf{G}$ betrachtet .

1.3 Kranzprodukte

Seien $(\mathbf{G}, X)$ und $(\mathbf{H}, Y)$ Permutationsgruppen (d.h. die Gruppe $\mathbf{G}$ operiert auf der Menge X) und $\mathbf{G}^Y$ bezeichne die Menge aller Funktionen $f : Y \longrightarrow \mathbf{G}$, mit der durch $(fg)(y) = f(y)g(y)$ und $f^{-1}(y) = [f(y)]^{-1}$ definierten Gruppenstruktur. Dann ist durch

$$f^h(y) = f(y^{h^{-1}}) \text{ mit } f \in \mathbf{G}^Y\,,\ h \in \mathbf{H}$$

eine Operation von $\mathbf{H}$ auf $\mathbf{G}^Y$ definiert, da

$$(f^h)^{h'}(y) = f^h(y^{h'^{-1}}) = f(y^{h'^{-1}h^{-1}}) = f^{hh'}(y)$$

gilt und offensichtlich $(ff')^h(y) = f^h(y)f'^h(y)$ ist. Die zerfallende Erweiterung $\mathbf{G}^Y \rtimes \mathbf{H}$ bezüglich dieser Operation heißt *uneingeschränktes (Permutations-)Kranzprodukt von* $(\mathbf{G}, X)$ *mit* $(\mathbf{H}, Y)$, welches mit $\mathbf{K} = (\mathbf{G}, X) \wr (\mathbf{H}, Y)$ bezeichnet wird. Die Gruppe $\mathbf{K}$ kann als Permutationsgruppe auf $X \times Y$ interpretiert werden, wobei die Operation von (f, h) auf (x, y) gegeben ist durch

$$(x, y)^{(f,h)} = (x^{f(y)}, y^h)$$

Die Untergruppe $\mathbf{G}^Y$ von $\mathbf{K}$ heißt *Basisuntergruppe* und wird auch mit $B(\mathbf{K})$ benannt.

Sei $y \in Y$, $g \in \mathbf{G}$ und definiere $y_g \in B(\mathbf{K})$ durch

$$y_g(y') = \begin{cases} g & für \quad y' = y \\ 1 & für \quad y' \neq y \end{cases} \quad ,,$$

dann ist $\{y_g \,|\, g \in \mathbf{G}\}$ eine zu $\mathbf{G}$ isomorphe Untergruppe von $B(\mathbf{K})$ und die Injektion $\iota_y : g \mapsto y_g$ heißt *y-Komponenten-Einbettung von* $\mathbf{G}$ *in* $\mathbf{K}$. Hier sei darauf hingewiesen, dass $B(\mathbf{K}) = \prod_{y \in Y} \mathbf{G}^{\iota_y}$ ist. Eine andere nützliche Einbettung von $\mathbf{G}$ in $\mathbf{K}$ ist die *diagonale Einbettung* $\Delta : \mathbf{G} \longrightarrow B(\mathbf{K})$, die durch $g^{\Delta}(y) = g$ für alle $y \in Y$ gegeben ist.
Der *Träger* von $f \in B(\mathbf{K})$ ist die Menge $Tr(f) = \{y \in Y \,|\, f(y) \neq 1\}$ und $\mathbf{G}^{(Y)} = \{f \in \mathbf{G}^Y \,|\, |Tr(f)| < \infty\}$ ist offensichtlich eine unter der Operation von $\mathbf{H}$ invariante Untergruppe von $\mathbf{K}$. Die zerfallende Erweiterung $\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{G}^{(Y)} \rtimes \mathbf{H}$ heißt *eingeschränktes (Permutations-) Kranzprodukt von* $(\mathbf{G}, X)$ *mit* $(\mathbf{H}, Y)$. Zu beachten ist, daß das Bild von $\mathbf{G}$ unter Δ in $\mathbf{K}$ im Gegensatz zu den Bildern

unter den Komponenten-Einbettungen nicht im eingeschränkten Kranzprodukt liegt, wenn Y unendlich ist, da $B(\overline{\mathbf{K}}) = \mathbf{G}^{(Y)} = \bigoplus_{y\in Y} \mathbf{G}^{\iota_y}$. Falls Y endlich ist, gibt es keinen Unterschied zwischen $\mathbf{K}$ und $\overline{\mathbf{K}}$.

Das *(un)eingeschränkte standard Kranzprodukt* $\mathbf{K} = \mathbf{G} \wr \mathbf{H}$ der Gruppe $\mathbf{G}$ mit der Gruppe $\mathbf{H}$ ist das (un)eingeschränkte Permutations-Kranzprodukt von $(\mathbf{G},\mathbf{G})$ mit $(\mathbf{H},\mathbf{H})$, wobei die Operation jeweils die Rechtsmultiplikation ist. das folgende Ergebnis ist eine einfache Übung.

Lemma 7 *Sind* $\mathbf{U}$ *und* $\mathbf{V}$ *Untergruppen der Gruppen* $\mathbf{G}$ *bzw.* $\mathbf{H}$, *dann ist* $\mathbf{U}\wr\mathbf{V}$ *eine Untergruppe von* $\mathbf{G} \wr \mathbf{H}$.

Außerdem brauche ich später

Lemma 8 *Es gilt* $\mathbf{G}' \wr \mathbf{H}' \subset (\mathbf{G} \wr \mathbf{H})'$.

Beweis: Offensichtlich sind $\mathbf{H}'$ und $\prod_{h\in\mathbf{H}}(\mathbf{G}')^{\iota_h}$ in $(\mathbf{G} \wr \mathbf{H})'$ enthalten. Also ist

$$\mathbf{G}' \wr \mathbf{H}' = (\prod_{h\in\mathbf{H}'} (\mathbf{G}')^{\iota_h}) \rtimes \mathbf{H}' \subset (\mathbf{G} \wr \mathbf{H})' \text{, q.e.d.}$$

Lemma 9 *Ist* $\mathbf{N}$ *ein Normalteiler der Gruppe* $\mathbf{G}$ *und* $\mathbf{G}/\mathbf{N} = \mathbf{F}$, *dann bettet* $\mathbf{G}$ *in* $\mathbf{N} \wr \mathbf{F}$ *ein.*

Beweis: Sei $\phi : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{F}$ die kanonische Projektion und zu jedem $f \in \mathbf{F}$ sei ein $t_f \in \mathbf{G}$ fest gewählt mit $t_f^\phi = f$. Dann ist für alle $g \in \mathbf{G}$ das Element $t_f g t_{fg^\phi}^{-1}$ in $\mathbf{N}$, denn es gilt $(t_f g t_{fg^\phi}^{-1})^\phi = fg^\phi(fg^\phi)^{-1} = 1$. Das rechtfertigt nun die Definition eines $b_g \in B(\mathbf{N} \wr \mathbf{F})$ für $g \in \mathbf{G}$ durch $b_g(f) = t_f g t_{fg^\phi}^{-1}$.
Beh.: Dann ist $\iota : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{N} \wr \mathbf{F}$ mit $g^\iota = b_g g^\phi$ ein injektiver Homomorphismus. Aus

$$b_{gg'}(f) = t_f g g' t_{f(gg')^\phi}^{-1} = t_f g t_{fg^\phi}^{-1} t_{fg^\phi} g' t_{(fg^\phi)g'^\phi}^{-1} = (b_g b_{g'}^{(g^\phi)^{-1}})(f)$$

folgt

$$(gg')^\iota = b_{gg'}(gg')^\phi = b_g b_{g'}^{(g^\phi)^{-1}} g^\phi g'^\phi = b_g g^\phi b_{g'} g'^\phi = g^\iota g'^\iota \,,$$

und aus $g^\iota = 1$ folgt $g^\phi = 1$ und $b_g = 1$, und weiter $t_f g t_f^{-1} = 1$, also $g = 1$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Kapitel 2

Gruppen mit polynomialem Wachstum

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß endlich erzeugte nilpotente Gruppen polynomiales Wachstum haben. Als nächstes liefert der Satz von Gromov, der hier nicht bewiesen wird, eine vollständige Charakterisierung der Gruppen mit polynomialem Wachstum. Im dritten Teil wird skizziert, warum es reicht, einen endlichen Anfang der Folge $w_n(\mathbf{G})$ zu kennen, um daraus schon auf polynomiales Wachstum der Folge zu schließen. Der letzte Abschnitt gibt eine kombinatorische Eigenschaft an, die polynomiales Wachstum von residuell endlichen Gruppen charakterisiert.

2.1 Nilpotente Gruppen

Ist $\mathbf{G}$ eine Gruppe dann bezeichnet $\mathbf{G}_n$ die Terme der *absteigenden Zentralreihe*, die induktiv durch $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}$ und $\mathbf{G}_n = [\mathbf{G}_{n-1}, \mathbf{G}]$ definiert sind. Die Gruppe $\mathbf{G}$ heißt *nilpotent*, wenn $\mathbf{G}_k = 1$ ist für ein $k \in \mathbb{N}$. Die Nilpotenzklasse der Gruppe $\mathbf{G}$ ist das größte k mit $\mathbf{G}_k \neq 1$. Dann gilt $[\mathbf{G}_i, \mathbf{G}_j] \subset \mathbf{G}_{i+j}$ und es gibt einen surjektiven Homomorphismus $\Phi : \mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i+1} \otimes \mathbf{G}_1/\mathbf{G}_2 \to \mathbf{G}_{i+1}/\mathbf{G}_{i+2}$, der durch die bilineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i+1} \times \mathbf{G}_1/\mathbf{G}_2 & \to & \mathbf{G}_{i+1}/\mathbf{G}_{i+2} \\ & (g\mathbf{G}_{i+1}, h\mathbf{G}_2) & \mapsto & [g,h]\mathbf{G}_{i+2} \end{array}$$

induziert wird (siehe z.B. [34]).
Wenn $\mathbf{A}$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist, dann ist $\mathbf{A}$ die direkte Summe einer endlichen Gruppe $\mathbf{T}$ mit einer freien abelschen Gruppe $\mathbf{F}$ von endlichem Rang r. Dieser Rang ist unabhängig von der Zerlegung von $\mathbf{A}$ und heißt *torsionsfreier Rang von* $\mathbf{A}$, der mit $r(\mathbf{A})$ bezeichnet wird.
Ab jetzt sei $\mathbf{G}$ eine endlich erzeugte nilpotente Guppe der Klasse k. Da $\mathbf{G}$ endlich erzeugt ist, sind die Faktoren $\mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i+1}$ endlich erzeugte abelsche Gruppen und es seien $r_i = r(\mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i+1})$ für $1 \leq i \leq k$.

Wolf hat in [45] gezeigt, daß eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe polynomiales Wachstum hat, aber sein Beweis liefert keine optimale Abschätzung für den Grad des Polynoms, das das Wachstum der Gruppe nach oben beschränkt. Den genauen Grad liefert der folgende Satz von Bass [3].

Satz 1 *Eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe* $\mathbf{G}$ *der Nilpotenzklasse* k *hat polynomiales Wachstum vom Grad* $d = \sum_{i=1}^{k} i\, r_i$, *d.h.* $w(\mathbf{G}) \sim n^d$.

Beweis: Sei $\mathbf{E}$ ein endliches Erzeugersystem von $\mathbf{G}$, so daß mit $e, f \in \mathbf{E}$ auch $e^{-1} \in \mathbf{E}$ und $[e, f] \in \mathbf{E}$. Die Existenz eines solchen $\mathbf{E}$ folgt aus der Surjektivität von Φ 11. Weiter sei $\mathbf{E}_i = \mathbf{E} \cap \mathbf{G}_i$. Dann ist $\mathbf{E}_i$ ein Erzeugersystem von $\mathbf{G}_i$. Ist $w = b_1 b_2 \ldots b_l$ ein Wort mit $b_j \in \mathbf{E}_i$ und T eine Teilmenge von $\mathbf{E}_i$, dann bezeichnet $gr_T(w)$ die Anzahl der $b_j \in \mathbf{T}$ und $gr(w) \leq (g_i, \ldots, g_k)$ heißt, daß $gr_{\mathbf{E}_j \setminus \mathbf{E}_{j+1}} \leq g_j$ für alle $i \leq j \leq k$ ist. Außerdem bezeichne $\overline{w}$ das Element in $\mathbf{G}_i$, das durch w definiert ist, und für eine Menge von Wörtern W ist $\overline{W} = \{\overline{w} \,|\, w \in W\}$. Sei nun i fest und $e_1, \ldots, e_s$ eine Auflistung der Elemente von $\mathbf{E}_i \setminus \mathbf{E}_{i+1}$, so daß $e_1, \ldots, e_{r_i}$ linear unabhängig modulo $\mathbf{G}_{i+1}$ sind, und sei $N = |\mathbf{G}_i : \langle e_1, \ldots, e_{r_i} \rangle \mathbf{G}_{i+1}| < \infty$. Das Wort w heißt *normalisiert*, wenn es von der Form

$$w = \underbrace{e_1 \ldots e_1}_{a_1} \underbrace{e_2 \ldots e_2}_{a_2} \ldots \underbrace{e_s \ldots e_s}_{a_s} w' \tag{2.1}$$

ist, wobei w' ein Wort in $\mathbf{E}_{i+1}$ ist und $a_j < N$ für $r_i < j \leq k$ gilt. Sei nun $W_i(g_i, \ldots, g_k)$ die Menge aller Wörter w in $\mathbf{E}_i$ mit $gr(w) \leq (g_i, \ldots, g_k)$ und $N_i(g_i, \ldots, g_k)$ die Teilmenge der normalisierten Wörter. Mit $p_{r_i}(n)$ wird das aus Beispiel II) 1.2 bekannte Polynom vom Grad r_i bezeichnet, das das Wachstum einer freien abelschen Gruppe vom Rang r_i bezüglich einer Basis beschreibt. Es gelten jetzt

1) $|\,\overline{N_i(g_i, \ldots, g_k)}\,| \leq K_i p_{r_i}(g_i) |\,\overline{W_{i+1}(g_{i+1}, \ldots, g_k)}\,|$ für eine Konstante K_i.

2) Zu der Konstante C gibt es eine Konstante C' mit $|\,\overline{W_i(Cn^i, \ldots, Cn^k)}\,| \leq |\,\overline{N_i(C'n^i, \ldots, C'n^k)}\,|$.

Bevor 1) und 2) bewiesen werden, zeige ich, daß sie $w(\mathbf{G}) \preceq n^d$ implizieren: Es ist klar, daß ein Element $h \in \mathbf{G}$ der Länge höchstens n bezüglich $\mathbf{E}_1$ durch ein Wort w in $\mathbf{E}_1$ der Länge höchstens n darstellbar ist, und offensichtlich gilt $w \in W_1(n, n^2, \ldots, n^k)$. Also

$$\begin{array}{rcl}
w_n^{\mathbf{E}_1}(\mathbf{G}) & \leq & |\,\overline{W_1(n, n^2, \ldots, n^k)}\,| \\
2) & \leq & |\,\overline{N_1(c_1 n, c_1 n^2, \ldots, c_1 n^k)}\,| \\
1) & \leq & K_1 p_{r_1}(c_1 n) |\,\overline{W_2(c_1 n^2, \ldots, c_1 n^k)}\,| \\
 & \vdots & \\
 & \leq & K_1 \cdots K_k p_{r_1}(c_1 n) p_{r_2}(c_2 c_1 n^2) \cdots p_{r_k}(c_k \cdots c_1 n^k) \\
 & = & q(n)
\end{array}$$

Das Polynom $q(n)$ hat nun den Grad $\sum_{i=1}^{k} i r_i = d$, wie behauptet.

Zu 1): Ein normalisiertes Wort $w \in N_i(g_i, \ldots, g_k)$ von der Form (2.1) erfüllt $\sum_{j=1}^{s} gr_{\{e_j\}}(w) \leq g_i$, woraus mit $K_i = (s - r_i)^N + 1$ die Behauptung folgt, weil

$p_{r_i}(g_i)$ die Anzahl der Elemente in $\{e_1, \dots, e_{r_i}\}$ der Länge $\leq g_i$ modulo $\mathbf{G}_{i+1}$ nach oben beschränkt.
Zu 2): Sei $w \in W_i(Cn^i, \dots, Cn^k)$. Dann reicht es, eine Konstante C' und ein $w' \in N_i(C'n^i, \dots, C'n^k)$ mit $\overline{w} = \overline{w'}$ anzugeben.
Als erstes ein Hilfsmittel:
Sei $\tilde{w}$ das Wort, das entsteht, wenn man einen Buchstaben e_j, der in w vorkommt, ganz nach links schiebt, indem man immer wieder ein Unterwort der Form fe_j durch $e_j f[f, e_j]$ ersetzt, bis dieses fest gewählte e_j ganz links steht. Offensichtlich ist $\overline{\tilde{w}} = \overline{w}$. Außerdem ist $[f, e_j] \in \mathbf{G}_{r+j}$, falls $f \in \mathbf{G}_r$. Also gilt

$$gr(\tilde{w}) \leq (Cn^i, \dots, Cn^k) + (\underbrace{0, \dots, 0}_{i}, Cn^i, \dots, Cn^{k-i}) \qquad (*)$$

Sei $\tau : \mathbb{Z}^{k-i+1} \to \mathbb{Z}^{k-i+1}$ durch $\tau(z_i, \dots, z_k) = (0, z_i, \dots, z_{k-1})$ definiert. Dann läßt sich $(*)$ auch durch $gr(\tilde{w}) \leq (id + \tau^i)(Cn^i, \dots, Cn^k)$ ausdrücken.
Insbesondere ist $gr_{\{e_j\}}(\tilde{w}) = gr_{\{e_j\}}(w)$ für alle $1 \leq j \leq s$.

1. Schritt von w nach w'
Man wendet das Hilfsmittel zuerst auf alle Buchstaben e_1, dann auf alle e_2, usw. und als letztes auf alle e_s an, so daß ein Wort w_0 der Form

$$w_0 = \underbrace{e_1 \cdots e_1}_{p_1} \underbrace{e_2 \cdots e_2}_{p_2} \cdots \underbrace{e_s \cdots e_s}_{p_s} w_0'$$

entsteht, wobei w_0' ein Wort in $\mathbf{E}_{i+1}$ ist. Weil höchstens Cn^i Buchstaben e_j in w vorkommen gilt

$$gr(w_0) \leq (id + \tau^i)^{Cn^i}(Cn^i, \dots, Cn^k)$$

In w_0 kann aber noch $p_j \geq N$ für ein $r_i < j \leq s$ gelten. Deshalb sei v_j ein Wort in $\{e_1, \dots, e_{r_i}\} \cup \mathbf{E}_{i+1}$ mit $\overline{v_j} = \overline{\underbrace{e_j \cdots e_j}_{N}}$, und sei L so groß, daß $gr(v_j) \leq (L, L, \dots, L)$ für alle $r_i < j \leq s$ ist.

2. Schritt von w nach w'
Falls $p_j \geq N$ ist, sei $p_j = x_j N + y_j$ mit $y_j < N$. Dann wird das Unterwort $\underbrace{e_j \cdots e_j}_{p_j}$ von w_0 durch $\underbrace{v_j \cdots v_j}_{x_j} \underbrace{e_j \cdots e_j}_{y_j}$ ersetzt. Ist dies für alle $r_i < j \leq s$ mit $p_j \geq N$ getan, dann erfüllt das resultierende Wort w_1 offensichtlich $\overline{w_1} = \overline{w}$ und $gr_{\{e_j\}}(w_1) < N$ für alle $r_i < j \leq s$. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
gr(w_1) &\leq (id + \tau^i)^{Cn^i}(Cn^i, \dots, Cn^k) + \textstyle\sum_{r_i < j \leq s} x_j (L, L, \dots, L) \\
&\leq (id + \tau^i)^{Cn^i}(Cn^i, \dots, Cn^k) + Cn^i(L, L, \dots, L) \\
&\leq (id + \tau^i)^{Cn^i}(Cn^i, \dots, Cn^k) + L(Cn^i, \dots, Cn^k) \\
&\leq (id + \tau^i)^{Cn^i}(Cn^i, \dots, Cn^k) + L(id + \tau^i)^{Cn^i}(Cn^i, \dots, Cn^k) \\
&= (L+1)(id + \tau^i)^{Cn^i}(Cn^i, \dots, Cn^k) \\
&= (h_i, h_{i+1}, \dots, h_k)
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $h_i \leq (1 + L)Cn^i$.

Da w_1 nicht unbedingt normalisiert sein muß, wendet man noch einmal den 1. Schritt darauf an und erhält ein normalisiertes Wort w' mit $\overline{w'} = \overline{w}$ und $gr(w') \leq (id + \tau^i)^{h_i}(h_i, \ldots, h_k) \leq (1 + L)(id + \tau^i)^{(2+L)Cn^i}(Cn^i, \ldots, Cn^k)$. Mit $C_1 = (2 + L)C$ und

$$n^{[z]} = \begin{cases} n^z & falls \quad z \geq i \\ 0 & sonst \end{cases}$$

gilt dann

$$gr(w') \leq C_1(id + \tau^i)^{C_1 n^i}(n^i, \ldots, n^k) = (g_i, \ldots, g_k)$$

und für $i \leq j \leq k$ ergibt sich

$$\begin{aligned} g_j &\leq C_1(n^j + \tbinom{C_1 n^i}{1} n^{[j-i]} + \tbinom{C_1 n^i}{2} n^{[j-2i]} + \cdots) \\ &\leq C_1(n^j + C_1 n^j + \tfrac{C_1^2}{2!} n^j + \cdots) \\ &\leq C_1 e^{C_1} n^j = C' n^j \end{aligned}$$

Damit ist 2) bewiesen.
Jetzt bleibt noch $n^d \preceq w_n(\mathbf{G})$ zu zeigen. Dazu sei F_1 eine endliche Teilmenge von $\mathbf{G}$, deren Bild $\mathbf{G}/\mathbf{G}_2$ erzeugt und sei F_i induktiv definiert durch

$$F_{i+1} = \{[f, f'] \mid f \in F_i,\ f' \in F_1\}$$

Aus der Surjektivität von Φ (S. 11) folgt dann, daß das Bild von F_i schon $\mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i+1}$ erzeugt und insbesondere wird $\mathbf{G}$ von F erzeugt.
Sei $0 < n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq k$ und $f_i \in F_i$ sowie $0 \leq m \leq n^i$. Dann zeigt man mit Induktion über i, daß es ein $f_{i,m} \in \mathbf{G}_i$ mit $l_{F_1}(f_{i,m}) \leq 8^{i-1}n$ und $f_{i,m} \equiv f_i^m$ mod $\mathbf{G}_{i+1}$ gibt. Für $i = 1$ erfüllt $f_{i,m} = f_i^m$ die Bedingungen. Sei also $i > 1$ und $f_i = [f_{i-1}, f]$ mit $f_{i-1} \in F_{i-1}$, $f \in F_1$, dann folgt aus der Bilinearität von ϕ und mit $m = an + b$, $0 \leq b < n$

$$f_i^m \equiv [f_{i-1}^a, f^n][f_{i-1}, f^b] \equiv [f_{i-1,a}, f^n][f_{i-1,1}, f^b] \bmod \mathbf{G}_{i+1}$$

weil $0 \leq a \leq n^{i-1}$. Setzt man also $f_{i,m} = [f_{i-1,a}, f^n][f_{i-1,1}, f^b]$, so gilt die Behauptung, da $l_{F_1}(f_{i,m}) \leq 2 \cdot 8^{i-2}n + 2n + 2 \cdot 8^{i-2}n + 2b \leq 8^{i-1}n$. Mit $f_{i,-m} = f_{i,m}^{-1}$ gilt die Behauptung auch für $|m| \leq n^i$.
Seien jetzt $f_{i1}, \ldots, f_{ir_i} \in F_i$ linear unabhängig modulo $\mathbf{G}_{i+1}$ und sei W_i die Menge aller Elemente der Form $f_{i1,m_1} \cdots f_{ir_i,m_{r_i}}$ mit $|m_j| \leq n^i$ für $1 \leq j \leq r_i$. Dann ist $|W_i| = (2n^i + 1)^{r_i}$, wobei jedes dieser Elemente höchstens F_1-Länge $r_i 8^{i-1}n$ hat. Weil die Produktbildung eine injektive Abbildung von $W_1 \times \ldots \times W_k$ in $\mathbf{G}$ ist, deren Bild also die Kardinalität $p(n) = \prod_{j=1}^{k}(2n^j + 1)^{r_i}$ hat und in $B_{Kn}(\mathbf{G})$ liegt, wobei $K = \sum_{j=1}^{k} r_i 8^i$ ist, folgt $n^d \sim p(n) \preceq w_n(\mathbf{G})$, q.e.d.

2.2 Fast nilpotente Gruppen

Ist $\mathcal{E}$ eine gruppentheoretische Eigenschaft, dann ist die Gruppe $\mathbf{G}$ eine *fast $\mathcal{E}$-Gruppe*, falls sie eine Untergruppe von endlichem Index besitzt, die eine $\mathcal{E}$-Gruppe ist (im Englischen wird meistens virtually, aber auch almost benutzt). Eine triviale Folgerung aus Satz 1 mit Lemma 4 ist, daß eine endlich erzeugte fast nilpotente Gruppe polynomiales Wachstum hat. Bemerkenswert und bei weitem nicht trivial ist die Umkehrung dieser Aussage, die zuerst von Gromov in [16] bewiesen wurde. Später haben Wilkie und van den Dries dafür einen Beweis mit Hilfe von Nichtstandard-Methoden gegeben [40], der es ihnen erlaubt die Bedingung polynomiales Wachstum wie folgt abzuschwächen:

Eine Folge $f \in \mathcal{F}$ hat *fast polynomiales* Wachstum, wenn es ein Polynom $p(n)$ gibt, so daß $f_n \leq p(n)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 2 (Wilkie, v.d. Dries) *Eine endlich erzeugte Gruppe mit fast polynomialem Wachstum ist fast nilpotent.*

2.3 Lokale Wachstumskriterien

Aus dem letzten Abschnitt ist ersichtlich, daß das Wachstum Einfluß auf die Struktur der Gruppe hat. Andererseits lässt sich das Wachstum einer Folge aber nicht mit der alleinigen Kenntnis einer endlichen Teilfolge bestimmen, d.h. Wachstum ist eine globale Eigenschaft. Um so erstaunlicher ist es, daß schon endliche Teilfolgen Aussagen über die Struktur der Gruppe erlauben. Dies wird in dem folgenden Ergebnis von Wilkie und v.d. Dries [40] präzisiert.

Satz 3 *Zu gegebenen positiven ganzen Zahlen d und c gibt es positive Konstanten M, I, K, so daß jede endlich erzeugte Gruppe $\mathbf{G}$ mit endlichem Erzeugersystem $\mathbf{E}$, die $w_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) \leq c\, n^d$ für alle $n \leq M$ erfüllt, schon $w_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) \leq c\, n^d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt und eine nilpotente Untergruppe $\mathbf{N}$ vom Index höchstens I und Nilpotenzklasse höchstens K hat.*
Die Werte M, I, K sind im Sinne der Rekursionstheorie effektiv berechenbar, (was nicht heißt, dass es einen effektiven Algorithmus gibt).

Beweisskizze: Zuerst überzeugt man sich davon, daß sich in der Theorie T der ersten Stufe von Gruppen mit k besonders gekennzeichneten Elementen $x_1, \ldots, x_k$ (diese entsprechen den Erzeugern), die Sätze
s_M : "Die von $x_1, \ldots, x_k$ erzeugte Gruppe $\mathbf{G}$ erfüllt $w_n(\mathbf{G}) \leq cn^d$ für alle $n \leq M$", und
$s_{I,K}$: "Die von $x_1, \ldots, x_k$ erzeugte Gruppe hat eine nilpotente Untergruppe vom Index $\leq I$ und Nilpotenzklasse $\leq K$",
ausdrücken lassen. Dann ist der Satz von Gromov äquivalent zu

$$T \models \bigwedge_{M \leq 1} s_M \longleftrightarrow \bigvee_{I,K \leq 1} s_{I,K} \qquad (**)$$

Nun gibt es eine Version des Kompaktheitssatzes der Modelltheorie [6], der die Existenz von M, I, K mit $T \models s_M \longleftrightarrow s_{I,K}$ liefert, welche sich (im Prinzip) finden lassen, indem man Beweise von $(**)$, die nach dem Gödel'schen Vollständigkeitssatz existieren, testet, bis man einen Beweis von $T \models s_M \longleftrightarrow s_{I,K}$ findet.

Aus Satz 3 ergibt sich auch die Existenz einer nicht polynomial beschränkten Funktion $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, so daß jede Gruppe $\mathbf{G}$ mit endlichem Erzeugersystem $\mathbf{E}$, für die $w_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) \leq g(n)$ gilt, fast nilpotent ist [40].

Für linear wachsende Gruppen haben wiederum Wilkie und v.d. Dries [41] ein leicht zu überprüfendes lokales Kriterium angegeben, (dabei ist wie früher $s_n(\mathbf{G}) = w_n(\mathbf{G}) - w_{n-1}(\mathbf{G})$):

Satz 4 *Sei* $\mathbf{G}$ *eine endlich erzeugte unendliche Gruppe. Falls* $s_n(\mathbf{G}) \leq n$ *für ein* $n > 0$ *gilt, dann hat* $\mathbf{G}$ *eine unendlich-zyklische Untergruppe vom Index höchstens* n^4.

Um diesen Satz zu beweisen, wird gezeigt, daß "lange" Wörter, in denen nur n verschiedene Unterwörter der Länge genau n vorkommen können, von der Form uvw sind, wobei die Längen von u und w durch n beschränkt sind und v ein periodisches Wort mit Periode $\leq n$ ist. Ein Pigeon-Hole-Argument ergibt (weil die Gruppe unendlich ist) dann die Existenz eines Wortes x, so daß alle Potenzen von x verschiedene Elemente definieren.
Die Schranke für den Index wurde von Seifter und Imrich [20] zu $s_n(\mathbf{G})$ verbessert, wenn $s_n(\mathbf{G}) \leq n$. Daß diese Schranke optimal ist, zeigt schon die unendliche Diedergruppe $\mathbf{D}_\infty = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1 \rangle$, denn $\langle xy \rangle$ ist unendlich-zyklisch vom Index 2 und es gibt genau 2 Elemente der Länge n für jedes $n \geq 1$, nämlich $xyxy \cdots x$ und $yxyx \cdots y$, falls n ungerade, bzw. $xyxy \cdots xy$ und $yxyx \cdots yx$, falls n gerade. Also $s_2(\mathbf{D}_\infty) = 2$.

2.4 Residuell endliche Gruppen I

In der Klasse der *residuell endlichen* Gruppen (das sind die Gruppen in denen der Durchschnitt aller Normalteiler von endlichem Index trivial ist) gibt es eine Arbeit, die die Äquivalenz von polynomialem Wachstum mit einer kombinatorischen Eigenschaften zeigt, die hier erwähnt werden soll. Shalev und Sempel betrachten in [39] die folgende Bedingung: Eine Gruppe heißt dort *kollabierend*, wenn es ein $0 < n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für jede n-elementige Teilmenge T, $|T^n| < n^n$ gilt, wobei $T^n = \{t_1 \cdots t_n \mid t_i \in T,\, i \in \{1, \ldots, n\}\}$ ist. Dann beweisen sie den folgenden

Satz 5 *Eine endlich erzeugte residuell endliche Gruppe ist genau dann kollabierend, wenn sie fast nilpotent ist.*

Der Beweis benutzt einen Satz von Wilson ([42] Satz 4), in den Zelmanovs Lösung des eingeschränkten Burnside Problems, sowie die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen eingeht.

Kapitel 3

Die Wachstumsalternative

Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Gruppen. Dann erfüllt $\mathcal{C}$ die *Wachstumsalternative*, wenn keine endlich erzeugte Gruppe $\mathbf{G} \in \mathcal{C}$ intermediäres Wachstum hat. Immer wenn von freien (Halb-)Gruppen die Rede ist, sind freie (Halb-)Gruppen in der Klasse aller (Halb-)Gruppen gemeint.

Das nächste Lemma zeigt, in welchem Zusammenhang die Gestalt der erzeugenden Funktion mit der Wachstumsalternative steht.

Lemma 10 *Sei* $\mathbf{G}$ *eine endlich erzeugte Gruppe und* $\mathbf{E}$ *ein endliches Erzeugersystem, so daß die erzeugende Funktion* $H_{\mathbf{G}}^{\mathbf{E}}(x)$ *eine rationale Funktion ist. Dann erfüllt* $\mathbf{G}$ *die Wachstumsalternative.*

Beweis: Sei $H(x) = H_{\mathbf{G}}^{\mathbf{E}}(x) = \sum_{n \geq 0} s_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G}) x^n = \frac{p(x)}{q(x)}$, mit Polynomen $p(x)$ und $q(x)$, und r das Minimum der Absolutbeträge der komplexen Nullstellen von $q(x)$.
Falls $r < 1$, so ist auch der Konvergenzradius R von $H(x)$ echt kleiner als 1. Da aber $1/R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G})}$ gilt ([17] S.363), folgt $\sup_{m \geq n} \sqrt[n]{s_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G})} > 1+\varepsilon$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt dann $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n^{\mathbf{E}}(\mathbf{G})} > 1$ und mit Lemma 1 ergibt sich $w(\mathbf{G}) \sim e^n$.
Ist $r \geq 1$, dann schreibe $q(x) = C \prod_{n=0}^{d} (1 - \frac{x}{\lambda_n})$, wobei d der Grad und die λ_n die komplexen Nullstellen von $q(x)$ sind. Wegen

$$\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x}{a}\right)^n$$

gilt für eine beliebige formale Potenzreihe $F(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ und $|a| \geq 1$:

$$\frac{F(x)}{1-\frac{x}{a}} = \sum_{n \geq 0} c_n x^n, \quad \text{wobei} \quad c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i}{a^{n-i}} \leq \sum_{i=0}^{n} b_i \quad \text{ist.}$$

Mit einer Induktion über d und Lemma 2i) folgt dann, daß $\mathbf{G}$ polynomiales Wachstum (vom Grad $\leq d+1$) hat. Das beendet den Beweis.

3.1 Auflösbare Gruppen

Die *abgeleitete Reihe* der Gruppe $\mathbf{G}$ ist induktiv durch $\mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{G}$, sowie $\mathbf{G}^{(i+1)} = [\mathbf{G}^{(i)}, \mathbf{G}^{(i)}]$ für $1 \leq i \in \mathbb{N}$ definiert und $\mathbf{G}^{(2)}$ heißt *Kommutatoruntergruppe*, die auch mit $\mathbf{G}'$ bezeichnet wird. Wenn $\mathbf{G}^{(l)} \neq 1$ und $\mathbf{G}^{(l+1)} = 1$ für ein $l \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist $\mathbf{G}$ *auflösbar mit Auflösbarkeitslänge* l.
Aus den Arbeiten von Milnor und Wolf [28, 45] ergibt sich

Satz 6 *Auflösbare Gruppen erfüllen die Wachstumsalternative.*

Da eine Gruppe mit subexponentiellem Wachstum keine freie Unterhalgruppe in zwei Erzeugern haben kann (Bemerkung nach Bsp. III) 1.2), ist dieser Satz eine Folgerung aus dem folgenden Satz, der in [37, 4, 24] bewiesen wurde.

Satz 7 *Eine endlich erzeugte auflösbare Gruppe ohne freie Unterhalbgruppe in zwei Erzeugern ist fast nilpotent.*

Sind X und Y Teilmengen der Gruppe $\mathbf{G}$, dann definiere wie üblich $\langle X^Y \rangle = \langle x^y \mid x \in X,\, y \in Y \rangle$. Außerdem heißt eine Gruppen *zusammengehalten* (constrained im Englischen), falls $\langle x^{\langle y \rangle} \rangle$ für alle $x, y \in \mathbf{G}$ endlich erzeugt ist. JetzT werden die Hilfsmittel für den Beweis von Satz 7 gesammelt.

Lemma 11 *Hat die Gruppe* $\mathbf{G}$ *keine freie Unterhalbgruppe in zwei Erzeugern, dann ist sie zusammengehalten.*

Beweis: Seien $x, y \in \mathbf{G}$. Da die von y und y^x erzeugte Unterhalbgruppe nicht frei ist, gilt eine Gleichung der Form

$$y^{m_1}(y^x)^{n_1} \cdots y^{m_k}(y^x)^{n_k} = (y^x)^{r_1} y^{s_1} \cdots (y^x)^{r_l} y^{s_l}, \tag{3.1}$$

wobei alle m_i, n_i, r_i, s_i nicht negativ sind und m_1 und r_1 sind nicht Null. Diese Gleichung läßt sich umschreiben zu

$$y^{t_1}(x^{-1})^{y^{t_2}} \cdots (x^{-1})^{y^{t_p}} x = y^{u_1}(x^{-1})^{y^{u_2}} \cdots (x^{-1})^{y^{u_q}}, \tag{3.2}$$

mit $0 < t_p < t_{p-1} \ldots < t_1$ und $0 < u_q < q_{q-1} \ldots < u_1$. Falls $t_1 \neq u_1$ ist, so gilt $y^{t_1 - u_1} \in \langle x^{\langle y \rangle} \rangle = \mathbf{N}$, woraus folgt, daß der Index von $\mathbf{N}$ in $\langle x, y \rangle$ endlich ist, also ist $\mathbf{N}$ endlich erzeugt.
Ist aber $t_1 = u_1$, dann folgt $x \in \langle x^y, x^{y^2}, \ldots, x^{y^{t_1}} \rangle$. Ein analoges Argument mit y^{-1} anstelle von y ergibt $x \in \langle x^{y^{-1}}, x^{y^{-2}}, \ldots, x^{y^{-h}} \rangle$ für ein $h > 0$. Mit Induktion und $x^{y^{-1}} \in \langle x, x^{y^1}, \ldots, x^{y^{t_1 - 1}} \rangle \subset \langle x^y, x^{y^2}, \ldots, x^{y^{t_1}} \rangle$ bzw. dem entsprechenden Ausdruck für x^y folgt dann $\mathbf{N} = \langle x^{y^{-h}}, \ldots, x, \ldots, x^{y^{t_p}} \rangle$, also ist das Lemma bewiesen.

Lemma 12 *Sei die endlich erzeugte Gruppe* $\mathbf{G}$ *zusammengehalten und* $\mathbf{N}$ *ein Normalteiler von* $\mathbf{G}$ *mit zyklischer Faktorgruppe. Dann ist* $\mathbf{N}$ *endlich erzeugt.*

Beweis: Es gibt $n_1, \ldots, n_r \in \mathbf{N}$ sowie $g \in \mathbf{G}$, so daß $\mathbf{G} = \mathbf{N}\langle g \rangle = \langle n_1, \ldots, n_r, g \rangle$ gilt. Dann ist außerdem $\mathbf{N} = \langle \{n_1, \ldots, n_r\}^{\mathbf{G}} \rangle = \langle \{n_1, \ldots, n_r\}^{\langle g \rangle} \rangle$. Da aber $\langle n_i^{\langle g \rangle} \rangle$ endlich erzeugt ist, ist auch $\mathbf{N}$ endlich erzeugt, q.e.d.

Die Gruppe $\mathbf{G}$ heißt *polyzyklisch*, wenn es eine Reihe $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \supset \mathbf{G}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{G}_n = 1$ mit $\mathbf{G}_i$ normal in $\mathbf{G}_{i-1}$ und zyklischen $\mathbf{G}_{i-1}/\mathbf{G}_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gibt. Ist $\mathbf{G}$ eine endlich erzeugte auflösbare Gruppe, dann zeigt eine Induktion über $r(\mathbf{G}/\mathbf{G}')$ (siehe 2.1), dass $\mathbf{G}'$ endlich erzeugt ist. Eine weitere Induktion über die Auflösbarkeitslänge von $\mathbf{G}$ führt dann zu

Lemma 13 *Eine endlich erzeugte auflösbare Gruppe ohne freie Unterhalbgruppe ist polyzyklisch.*

Der Beweis von Satz 6 wird nun durch den folgenden Satz, der schon in [45] zu finden ist, abgeschlossen. Der angegebene Beweis ist eine Mischung der Beweise in [4, 24].

Satz 8 *Eine polyzyklische Gruppe* $\mathbf{G}$ *ohne freie Unterhalbgruppe ist fast nilpotent.*

Beweis: Um den Satz zu beweisen reicht es, von einer Untergruppe von endlichem Index in $\mathbf{G}$ zu zeigen, daß sie fast nilpotent ist. Da jede polyzyklische Gruppe eine torsionsfreie Untergruppe von endlichem Index hat ([34] 5.4.15), ist es keine Einschränkung $\mathbf{G}$, als torsionsfrei anzunehmen. Außerdem ist jede polyzyklische Gruppe auflösbar und der Beweis geht mit Induktion über die Auflösbarkeitslänge l von $\mathbf{G}$. Die Behauptung ist klar, wenn $l = 1$ ist. Per Induktion ist $\mathbf{G}$ nun eine Erweiterung einer endlich erzeugten abelschen torsionsfreien Gruppe $\mathbf{A}$ mit einer fast nilpotenten Gruppe. Und wie oben ist es keine Einschränkung $\mathbf{G}$ als Erweiterung von $\mathbf{A}$ mit einer torsionsfreien nilpotenten Gruppe anzunehmen. Da $\mathbf{G}$ polyzyklisch ist, gibt es eine zentrale Reihe $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \supset \mathbf{G}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{G}_n = \mathbf{A}$ mit unendlich zyklischen Faktoren. Sei $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_{i+1}\langle x_i \rangle$ für $0 \leq i \leq n-1$.

Es reicht nun zu zeigen, daß $\langle \mathbf{A}, x_i^{k_i} \rangle$ nilpotent ist für geeignete $0 \neq k_i \in \mathbb{Z}$ und alle $0 \leq i \leq n-1$, denn dann hat $\mathbf{U} = \langle \mathbf{A}, x_{n-1}^{k_{n-1}}, \ldots, x_0^{k_0} \rangle$ endlichen Index in $\mathbf{G}$ und ist nilpotent, weil es in $\mathbf{A}$ eine bezüglich $\langle \mathbf{A}, x_{n-1}^{k_{n-1}}, \ldots, x_1^{k_1} \rangle$ zentrale Reihe per Induktion gibt, die geschnitten mit einer bezüglich $\langle \mathbf{A}, x_0^{k_0} \rangle$ zentralen Reihe in $\mathbf{A}$ eine bezüglich $\mathbf{U}$ zentrale Reihe ergibt und $\mathbf{U}/\mathbf{A}$ klarerweise nilpotent ist.

Angenommen $\langle \mathbf{A}, x_i^{k_i} \rangle$ ist nicht nilpotent für alle $0 \neq k_i \in \mathbb{Z}$ und ein $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Sei $x = x_i$ und Ψ die lineare Abbildung des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbf{A}$, die durch $a \mapsto a^x$, $a \in \mathbf{A}$ induziert wird, sowie p das charakteristische Polynom von Ψ. Dann gilt die

Behauptung: Das Polynom p hat eine Wurzel, deren Absolutbetrag $\neq 1$ ist (komplexe Wurzeln).

Sei p_n das charakteristische Polynom der Abbildung Ψ^n, $n \geq 2$. Angenommen alle Wurzeln von p haben Absolutbetrag 1, dann haben auch alle Wurzeln von p_n Absolutbetrag 1, denn sie sind Potenzen der Wurzeln von p. Da aber alle p_n nur ganzzahlige Koeffizienten haben und ihr Grad durch den torsionsfreien Rang von $\mathbf{A}$ beschränkt ist, sind dann die Absolutbeträge dieser Koeffizienten nach oben beschränkt, und es gibt nur endlich viele Polynome in der Folge p_n, $n \geq 2$. Also sind alle Wurzeln von p komplexe Einheitswurzeln und es gibt ein $q \in \mathbb{N}$ mit $\lambda^q = 1$ für alle Wurzeln λ von p, so daß alle Wurzeln von p_q gleich 1 sind, woraus sich folgt, daß $\langle \mathbf{A}, x^q \rangle$ nilpotent ist, ein Widerspruch.

Damit gilt die Behauptung und es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass für eine Wurzel μ des charakteristischen Polynoms p_k der linearen Abbildung Ψ^k, die von $y = x_i^k$ auf $\mathbf{A}$ induziert wird, $|\mu| > 2$ gilt. Sei nun p_1 ein über $\mathbb{Z}[x]$ irreduzibler Teiler von p_k mit Wurzel μ und $\mathbf{B} = \{a \in \mathbf{A} \mid a^{p_1(\Psi_k)} = 0\}$, dann ist $\mathbf{B}$ invariant unter Ψ^k und nicht trivial. Anders gesagt $\mathbf{H} = \mathbf{B} \rtimes \langle y \rangle$ ist eine Untergruppe von $\mathbf{G}$ und das charakteristische Polynom der von y induzierten linearen Abbildung auf $\mathbf{B}$ ist p_1 und hat eine Wurzel μ mit $|\mu| > 2$. Außerdem gibt es ein $x \in \mathbf{B}$ mit $\mathbf{B} = \langle x^{\langle y \rangle} \rangle$, da $\mathbf{B}$ ein irreduzibler $\langle y \rangle$-Modul ist, also $\mathbf{H} = \langle x, y \rangle$. Nun hat aber $\mathbf{H}$ als Untergruppe von $\mathbf{G}$ keine freie Unterhalbgruppe, d.h. in der von y und y^x erzeugten Unterhalbgruppe gilt eine Gleichung der Form (3.1), die sich wieder auf die Form (3.2) bringen läßt. Jetzt ist aber $t_1 = u_1$, da $\mathbf{H}/\mathbf{B}$ unendlich zyklisch ist. Daraus folgt nun, dass p_1 ein Teiler eines Polynoms der Form $\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i x^i$ mit $\varepsilon_i \in \{\pm 1, 0\}$ ist. Eine Wurzel eines solchen Polynoms kann aber nicht Absolutbetrag > 2 haben, weil für λ mit $|\lambda| > 2$ gilt:

$$|\sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i \lambda^i| \geq |\lambda_i^k| - \sum_{i=0}^{k-1} |\lambda^i| = |\lambda^k| - \frac{|\lambda^k| - 1}{|\lambda| - 1} \geq 1$$

Damit ist der Satz bewiesen.

3.2 Andere Klassen

Mit dem Resultat von Tits [36], dass eine endlich erzeugte lineare Gruppe über einem beliebigen Körper, die keine freie Untergruppe in zwei Erzeugern hat, fast auflösbar ist, gefolgt von Satz 6 erhält man

Satz 9 *Lineare Gruppen erfüllen die Wachstumsalternative.*

Eine weitere Klasse von Gruppen, die die Wachstumsalternative erfüllen, sind die von Gromov eingeführten hyperbolischen Gruppen. Ein Beweis dieser Aussage steht z.b in [9], was auch eine gute übersicht zu diesen Gruppen ist. Hier soll nur die Definition angegeben werden. Sei $\mathbf{G}$ eine endlich erzeugte Gruppe und $l(g)$ die Länge des Elementes $g \in \mathbf{G}$ bezüglich eines endlichen Erzeugersystems. Dann ist $\mathbf{G}$ hyperbolisch, wenn es ein $\delta \geq 0$ gibt, so daß $(x, y) \geq \min\{(x, z), (z, y)\} - \delta$ für alle $x, y, z \in \mathbf{G}$ gilt, wobei $(x, y) = \frac{1}{2}(l(x) + l(y) - l(x^{-1}y))$ ist.

3.3 Residuell endliche Gruppen II

Wie sich im nächsten Kapitel zeigen wird, gibt es in der Klasse der residuell endlichen Gruppen Beispiele mit intermediärem Wachstum. Hier möchte ich einige Ergebnisse zitieren, aus denen sich Bedingungen ergeben, die die Wachstumsalternative für residuell endliche Gruppen implizieren.
Dazu brauche ich noch folgende Definitionen: Eine Gruppe hat *endlichen Rang* r, wenn jede endlich erzeugte Untergruppe von $\leq r$ Elementen erzeugt werden

kann. Eine Gruppe $\mathbf{G}$ heißt *stark zusammengehalten*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\langle x^{\langle y \rangle} \rangle$ für alle $x, y \in \mathbf{G}$ von höchstens n Elementen erzeugt ist. Die Gruppe $\mathbf{G}$ heißt *lokal graduiert*, wenn jede endlich erzeugte Untergruppe ein nicht-triviales endliches homomorphes Bild hat.

Satz 10 *(Wilson[42]) Sei $\mathbf{G}$ eine endlich erzeugte residuell endliche Gruppe, so daß $\langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbf{G}$ Rang r hat. Dann ist $\mathbf{G}$ fast auflösbar.*

Mit Hilfe eines etwas allgemeineren Satzes ([42] Satz 4), erhalten Kim und Rhemtulla in [22] die folgende Charakterisierung von fast polyzyklischen Gruppen:

Satz 11 *Eine Gruppe $\mathbf{G}$ ist genau dann fast polyzyklisch, wenn sie endlich erzeugt, stark zusammengehalten und lokal graduiert ist.*

Da residuell endliche Gruppen offensichtlich lokal graduiert sind, ergibt sich aus diesen beiden Sätzen mit den Sätzen 6 und 8 sofort .

Satz 12

1. *Eine endlich erzeugte residuell endliche Gruppe, in der jede 2-erzeugte Untergruppe Rang $\leq r$ hat, erfüllt die Wachstumsalternative.*

2. *Eine endlich erzeugte residuell endliche stark zusammengehaltene Gruppe erfüllt die Wachstumsalternative.*

Kapitel 4

Intermediäres Wachstum in Gruppen

4.1 Überblick

Die Ergebnisse des letzten Kapitels könnten leicht zu der Vermutung verleiten, daß jede endlich erzeugte Gruppe die Wachstumsalternative erfüllt. Schon Milnor stellte dies (ohne so vielfältige Bestätigung) als Frage [29] . Erst in [12] gelang es Grigorchuk, bei einer Gruppe intermediäres Wachstum nachzuweisen. Eigentlich war eine solche Gruppe schon von Alëshin in [1] angegeben worden, jedoch wurde für diese mit Hilfe von endlichen Automaten definierten Gruppen das Wachstum nicht berechnet. Später hat Merzlyakov gezeigt, daß die Alëshin-Gruppen Untergruppen von endlichem Index haben, die isomorph zu einem endlichen direkten Produkt von Grigorchuk-Gruppen sind [26], woraus mit Lemma 4 und 6 folgt, daß sie intermediäres Wachstum haben.

In weiteren Arbeiten [11, 13] hat Grigorchuk seine Methode variiert, um Gruppen mit intermediärem Wachstum und einer der folgenden Klassen zu konstruieren: p-Gruppen für jede Primzahl p, torsionsfreie Gruppen, Gruppen mit überabzählbar vielen homomorphen Bildern. In Zusammenarbeit mit Machi [15] konnte gezeigt werden, daß die torsionfreien Gruppen mit einer linksinvarianten Ordnung ausgestattet werden können.

Fabrykowski und Gupta haben in [7] eine ähnliche Konstruktion wie in [12] angegeben, allerdings ist die Berechnung des Wachstums dieser Gruppe erst in [8] vollendet worden, obwohl die Darstellung vielleicht leichter nachzuvollziehen ist.

Im nächsten Abschnitt wird ein Beispiel präsentiert und dann folgt eine kurze Andeutung zu Verallgemeinerungen. Im letzten Abschnitt wird eine Verbindung zwischen residuell endlichen-p Gruppen und Algebren diskutiert.

4.2 Eine intermediär wachsende Gruppe

In Anlehnung an [12] wird jetzt eine Gruppe mit intermediärem Wachstum konstruiert, wobei die Berechnung des Wachstums etwas anders verläuft. Da sich

diese Gruppe gut als Automorphismengruppe eines regulären Baumes darstellen läßt, zuerst einige Definitionen:
Sei p eine Primzahl und $A = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, sowie A_n die Menge aller Wörter $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ der Länge n mit Buchstaben $a_i \in A$ und $n \geq 0$, sowie $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ $(A_0 = \{\emptyset\})$. Dann ist der *p-reguläre Baum* $\mathcal{B}_p$ der Graph mit der Eckenmenge A^* und den Kanten $(a, a') \in A^* \times A^*$, falls $a' = ab$ für ein $b \in A$, wobei aa' das Wort ist, das durch "Aneinanderhänge" der Wörter $a, a' \in A^*$ entsteht. Die Elemente von A_n heißen auch *Äste der Länge n*. Eine bijektive Abbildung $\alpha : A^* \to A^*$ ist ein Automorphismu s von $\mathcal{B}_p$, falls (a^α, a'^α) genau dann eine Kante ist, wenn (a, a') eine Kante ist. Mit $Aut(\mathcal{B}_p)$ wird die Automorphismengruppe von $\mathcal{B}_p$ bezeichnet. Jetzt folgen einige Eigenschaften, die leicht einzusehen sind, und weitere Bezeichnungen:

a) Sei $\alpha \in Aut(\mathcal{B}_p)$ und $a \in A_n$, dann gilt $a^\alpha \in A_n$, insbesondere $\emptyset^\alpha = \emptyset$.

b) Wenn $n \geq 1$ und $a \in A_n$, dann gibt es genau ein $a' \in A_{n-1}$, so dass (a', a) eine Kante ist. Dieses a' wird mit a^- bezeichnet.
Mit a^+ wird die Menge aller $a' \in A^*$, für die (a, a') eine Kante ist, bezeichnet.

c) Sei a ein Ast, $B_0(a) = \{a\}$ und $B_{n+1}(a) = \bigcup_{a' \in B_n(a)} a'^+$ für $n \geq 0$. Dann ist
$\mathcal{B}(a) = \bigcup_{n \geq 0} B_n(a) \subset A^*$ zusammen mit den von $\mathcal{B}_p$ induzierten Kanten wieder ein p-regulärer Baum und die Abbildung $\iota_a : \mathcal{B}_p \to \mathcal{B}(a)$ mit $a'^{\iota_a} = aa'$ ist einen Isomorphismus.

d) Für $a, a' \in A^*$ wird durch $a \leq a' \Longleftrightarrow a' \in \mathcal{B}(a)$ eine partielle Ordnung auf A^* definiert. Schreibe $a \| a'$, wenn a und a' nicht vergleichbar sind,

e) Seien $\alpha, \beta \in Aut(\mathcal{B}_p)$ und a, a' Äste, dann definiere

$$\alpha(a) = \iota_a^{-1} \alpha \iota_a \in Aut(\mathcal{B}(a)) \subset Aut(\mathcal{B}_p)$$

Es gilt dann $\alpha(a)\beta(a) = \alpha\beta(a)$, und wenn $a \| a'$ ist, gilt $[\alpha(a), \beta(a')] = 1$.

Ab jetzt sei $A = \{0, 1\}$ und z, der durch $(a_1 a_2 \cdots a_n)^z = (a_1 + 1 mod(2)) a_2 \cdots a_n$ definierte Automorphismus von $\mathcal{B}_2$. Anschaulich gesagt vertauscht z die Unterbäume $\mathcal{B}(0)$ und $\mathcal{B}(1)$, also gilt z^2=1. Desweiteren definiere $b, c \in Aut(\mathcal{B}_2)$ durch $b = z(0)z(10)b(111)$ und $c = z(0)z(110)c(111)$ gemäß Punkt e), so daß $b(111) = z(1110)z(11110)b(111111)$ usw. gilt. Dann folgt mit e) $b^2 = c^2 = 1$ und $cb = bc = d = z(10)z(110)d(111)$, denn je zwei der Äste 0, 10, 110, 111 sind unvergleichbar. Außerdem gelten $b^z = z(1)z(00)b(011)$, $c^z = z(1)z(010)c(011)$ und $d^z = z(00)z(010)d(011)$.
Sei p eine Primzahl, $\mathbf{G}$ eine Gruppe und $g \in \mathbf{G}$. Wenn die Ordnung von g eine p-Potenz ist, ist g ein *p-Element*. Sind alle Elemente von $\mathbf{G}$ p-Elemente, dann ist $\mathbf{G}$ eine *p-Gruppe*.

Satz 13 *Die Gruppe* $\mathbf{G} = \langle z, b, c, d \rangle$ *ist eine 2-Gruppe mit intermediärem Wachstum.*

Beweis: 1. Sei $\mathbf{H} = \langle b, c, d, b^z, c^z, d^z \rangle$ der von b, c und d erzeugte Normalteiler in $\mathbf{G}$. Aus den Definitionen von b und c ist ersichtlich, daß $\mathbf{H}$ die Äste der Länge 1 punktweise fest läßt, weshalb die Einschränkung von $\mathbf{H}$ auf $\mathcal{B}(a)$ einen Homomorphismus $\psi_a : \mathbf{H} \to Aut(\mathcal{B}(a)) \simeq Aut(\mathcal{B}_2)$ für $a \in \{0, 1\}$ induziert.
Bemerkung: Im Gegensatz zu Punkt e), wo $\alpha(a)$ als Automorphismus von $\mathcal{B}_p$ zu verstehen ist, der nur auf dem Unterbaum $\mathcal{B}(a)$ nicht-trivial operiert, wird hier "vergessen", daß $\mathcal{B}(a)$ ein Unterbaum von $\mathcal{B}_2$ ist, indem sie via ι_a identifiziert werden.
Sei $\psi : \mathbf{H} \to Aut(\mathcal{B}_2) \times Aut(\mathcal{B}_2)$ für $h \in \mathbf{H}$ durch $h^\psi = (h^{\psi_0}, h^{\psi_1})$ definiert. Die Bilder der Erzeuger von $\mathbf{H}$ unter ψ sind in der folgenden Tabelle angegeben.

g	b	c	d
g^ψ	(z, c)	(z, d)	$(1, b)$
$(g^z)^\psi$	(c, z)	(d, z)	$(b, 1)$

(4.1)

Hieraus ist sofort klar, daß ψ eine Einbettung von $\mathbf{H}$ in $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ ist und ψ_o : $\mathbf{H} \to \mathbf{G}$ surjektiv ist. Weil $\mathbf{H}$ eine echte Untergruppe von $\mathbf{G}$ ist, folgt daraus, daß $\mathbf{G}$ unendlich ist.

2. Mit $l(g)$ wird die Länge von $g \in \mathbf{G}$ bezüglich $\{z, b, c, d\}$ bezeichnet. Per Induktion über $l(g)$ zeige ich nun, daß $\mathbf{G}$ eine 2-Gruppe ist. Für $l(g) = 1$ gilt wie oben erwähnt $g^2 = 1$.
Sei also $g \in \mathbf{G}$ mit $l(g) > 1$ und schreibe g in der Form

$$*z * z \cdots * z* \tag{4.2}$$

wobei jeder $*$ für ein Elemente aus $\{b, c, d\}$ steht, und der erste und letzte $*$ fehlen dürfen.
i) Sei $g \in \mathbf{H}$, was gleichbedeutend damit ist, daß die Anzahl der z's in (4.2) gerade ist. Aus (4.1) liest man leicht ab, daß für ein $h \in \mathbf{H}$ der Form $*z * z$, $h^\psi = (\overline{z}*, *\overline{z})$ mit $\overline{z} \in \{z, 1\}$ gilt. Sei nun $g^\psi = (g_0, g_1)$, dann gilt wegen $l(g) \geq 2$:

$$l(g_i) \leq \frac{l(g)+1}{2} < l(g) \qquad \text{für} \quad i \in A (= \{0, 1\}$$

Nach Induktionsannahme sind also g_0 und g_1 2-Elemente und weil ψ eine Einbettung ist, ist auch g ein 2-Element.

ii) Sei nun $g \in \mathbf{G} \setminus \mathbf{H}$, dann hat g nach geeigneter Konjugation, die die Ordnung und Länge nicht ändert, die Form

$$z * z * \cdots z* \tag{4.3}$$

wobei der letzte $*$ nicht fehlt. Desweiteren ist $g^2 \in \mathbf{H}$, denn $\mathbf{G}/\mathbf{H} = \langle z\mathbf{H} \rangle$ hat Ordnug 2, und mit $(g^2)^\psi = (g_0, g_1)$ gilt $l(g_i) \leq \frac{1}{2} l(g^2) = l(g)$ für $i \in A$.

A) Wenn ein $*$ in (4.3) ein d ist, dann zeigt (4.1), daß

$$l(g_i) < 2 \cdot (\text{Anzahl der } * \text{ in } (4.3)) = l(g) \quad \text{für ein} \quad i \in A$$

gilt, so daß dieses g_i nach Induktionsannahme ein 2-Element ist. Eine einfache Überlegung zeigt, daß g_0 und g_1 konjugiert sind (betrachte $((g^z)^2)^\psi$), woraus dann folgt, daß g ein 2-Element ist.

B) Ist kein $*$ in (4.3) ein d aber ein $*$ ein c, dann zeigt (4.1), daß in einem g_i ein d vorkommt, wenn es nicht auf eine der folgenden Art gekürzt werden kann:

$$db = c \quad bd = c \quad dc = b \quad cd = b \quad dd = 1 \tag{4.4}$$

Kann dieses d gekürzt werden, dann ist $l(g_i) < l(g)$ für ein $i \in A$, woraus wie in A) folgt, daß g ein 2-Element ist. Läßt sich dieses d hingegen nicht kürzen, geht man mit g_i anstelle von g zu ii) ($l(g_i) \leq l(g)$) und endet in Teil A), so daß g_i und damit auch g ein 2-Element ist.

C) Sind alle $*$ in (4.3) b's, dann kommmt in einem g_i ein c vor, wie (4.1) zeigt. Also geht man mit diesem g_i anstelle von g zu ii) und kommt zu Teil B), so daß wieder g_i und g 2-Elemente sind.
Also ist $\mathbf{G}$ eine 2-Gruppe.

Da eine endlich erzeugte nilpotente periodische Gruppe endlich ist, was man aus dem Anfang von Abschnitt 2.1 zusammen mit der Tatsache, daß eine endlich erzeugte periodische abelsche Gruppe endlich ist, folgern kann, implizieren 1. und 2. mit Satz 2, daß das Wachstum von $\mathbf{G}$ mindestens intermediär ist.

3. Sei $\mathbf{H}_3$ die Untergruppe von $\mathbf{G}$, die alle Äste der Länge 3 punktweise fest läßt. Dann ist $\mathbf{H}_3$ wegen a) ein Normalteiler und $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ ist eine Untergruppe von $Sym(A_3) \simeq Sym(\{1, 2, \ldots, 2^3\})$, also $|\mathbf{G}/\mathbf{H}_3| \leq 2^3! = K$. Wenn T eine Schreiertransversale zu $\mathbf{H}$ in $\mathbf{G}$ ist, dann gilt $l(t) \leq K$ für alle $t \in T$. Schreibt man $g \in \mathbf{G}$ als $g = th$ mit $t \in T$, $h \in \mathbf{H}$, dann ist also $l(h) \leq l(g) + K$, und deshalb gilt

$$w_n(\mathbf{G}) = |B_n(\mathbf{G})| \leq K|B_{n+K}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{H}_3| \tag{4.5}$$

Es reicht demnach, $|B_n(\mathbf{G}) \cap \mathbf{H}_3|$ abzuschätzen. Sei dazu $g \in \mathbf{H}_3$ mit $l(g) \leq n$. Wegen $\mathbf{H}_3 \subset \mathbf{H}$ ist $g^\psi = (g_0, g_1)$ definiert, und weil g auch die Äste der Länge 2 punktweise fest läßt, gilt $g_0, g_1 \in \mathbf{H}$, so daß auch $g_i^\psi = (g_{i0}, g_{i1})$ für $i \in A$ definiert sind. Ebenso sind $g_{i_1i_2}^\psi = (g_{i_1i_20}, g_{i_1i_21})$ für alle $i_1i_2 \in A_2$ definiert.
Behauptung: Es gilt $\sum_{i_1i_2i_3 \in A_3} l(g_{i_1i_2i_3}) \leq \frac{n}{2} + 8$.

Wie unter 2. i) gesehen, ist $l(g_i) \leq \frac{n+1}{2}$ für $i \in A$, also gelten

(1) $l(g_o) + l(g_1) \leq n + 1$
(2) $\sum_{i_1i_2 \in A_2} l(g_{i_1i_2}) \leq l(g_o) + 1 + l(g_1) + 1 \leq n + 3$
(3) $\sum_{i_1i_2i_3 \in A_3} l(g_{i_1i_2i_3}) \leq \sum_{i_1i_2 \in A_2} (l(g_{i_1i_2}) + 1) \leq n + 7$

Jetzt zeige ich, daß für jeden $*$ in einer Darstellung von g gemäß (4.2) die rechte Seite von (3) um 1 verkleinert werden kann, woraus dann die Behauptung folgt, weil mindesten $\frac{n-1}{2}$ viele $*$ in so einer Darstellung vorkommen und offensichtlich

$n > 1$ sein muß.
α) Ist ein $*$ ein d, so zeigt (4.1), daß schon die rechte Seite (r.S.) von (1) um 1 reduziert werden kann, was sich bis zur r.S. von (3) fortsetzt.
β) Ist ein $*$ ein c, dann kommt entweder in g_0 oder g_1 wegen (4.1) ein d vor, welches erlaubt, die r.S. von (2) um 1 zu reduzieren, oder dieses von c^ψ bzw. $(c^z)^\psi$ induzierte d läßt sich gemäß (4.4) kürzen, so daß man schon die r.S. von (1) um 1 verkleinern kann.
γ) Ist ein $*$ ein b, dann kommt in einem g_i, $i \in A$ ein c vor oder die r.S. von (1) kann (wegen Kürzung) um 1 vermindert werden. Im ersten Fall liefert β) mit diesem g_i anstelle von g, daß man entweder die r.S. von (2) oder die r.S. von (3) um 1 vermindern kann.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

4. Jetzt wird aus der Behauptung und (4.5) gefolgert, daß $\mathbf{G}$ subexponentielles Wachstum hat.
Im folgenden ist $w_n = w_n(\mathbf{G})$. Sei r eine positive reelle Zahl und definiere $w_r = w_{n(r)}$, mit $n(r) \in \mathbb{N}$ und $n(r) - 1 < r \leq n(r)$. Dann gilt immer noch $w_{r+r'} \leq w_r w'_r$, was man durch Fallunterscheidung leicht nachprüft.
Da für verschiedene $g, g' \in \mathbf{H}_3$ auch die Mengen $\{g_{i_1 i_2 i_3} \,|\, i_1 i_2 i_3 \in A_3\}$ und $\{g'_{i_1 i_2 i_3} \,|\, i_1 i_2 i_3 \in A_3\}$ verschieden sind, ergibt sich aus (4.5) und der Behauptung

$$w_n \leq K \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_8 \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_8 \leq \frac{1}{2} n + K + 8}} w_{n_1} w_{n_2} \cdots w_{n_8} \qquad (+)$$

Sei $2 \leq N \in \mathbb{N}$ und $n > N$. Schreibe $n_i = \frac{n}{N} k_i + r_i$ mit $0 \leq r_i < \frac{n}{N}$ und $1 \leq i \leq 8$, dann gilt

$$\frac{n}{N} \sum_{1 \leq i \leq 8} k_i \leq \sum_{1 \leq i \leq 8} (\frac{n}{N} k_i + r_i) = \sum_{1 \leq i \leq 8} n_i \leq \frac{1}{2} n + K + 8$$

und deshalb auch $\sum_{1 \leq i \leq 8} k_i \leq \frac{1}{2} N + K + 8$. Weil nun $w_{n_i} \leq (w_{\frac{n}{N}})^{k_i + 1}$ gilt und die Anzahl der Summanden in (+) kleiner als $(\frac{1}{2} n + K + 8)^8$ ist, folgt

$$w_n \leq K (\frac{1}{2} n + K + 8)^8 (w_{\frac{n}{N}})^{\frac{1}{2} N + K + 8 + 8}$$

Zieht man daraus die n-te Wurzel und bildet dann den Limes für n gegen Unendlich, dann gilt $\lambda \leq \sqrt{\lambda}$, wobei $\lambda = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{w_n}$ ist. Da aber $\lambda \geq 1$ ist, muß $\lambda = 1$ gelten, woraus mit Lemma 1 folgt, daß $\mathbf{G}$ subexponentiell wächst. Das schließt den Beweis des Satzes ab.

4.3 Variationen

Hier möchte ich andeuten, wie sich das Beispiel des letzten Abschnitts verallgemeinern läßt, indem man die Definition der Erzeuger b, c und d etwas abändert.

Sei $u = u_1 u_2 \dots$ ein unendliches Wort mit $u_i \in \{\alpha, \beta, \gamma\} = \mathcal{A}$, z der im letzten Abschnitt definierte Automorphismus von $\mathcal{B}_2$ und definiere Abbildungen $b, c, d : \mathcal{A} \to \{1, z\}$ durch

x	α	β	γ
x^b	z	z	1
x^c	z	1	z
x^d	1	z	z

Jetzt definiere $b_u = u_1^b(0) u_2^b(10) \cdots u_i^b(\underbrace{11\dots1}_{i-1}0) \cdots$ gemäß e), sowie c_u und d_u analog. Dann sind b_u, c_u und d_u Automorphismen von $\mathcal{B}_2$ und es gelten $b_u c_u = c_u b_u = d_u$ und $b_u^2 = c_u^2 = d_u^2 = 1$.

Satz 14 *[12] Falls in u jeder der Buchstaben α, β, γ unendlich oft vorkommt, ist die Gruppe $\mathbf{G}_u = \langle z, b_u, c_u, d_u \rangle$ eine 2-Gruppe mit intermediärem Wachstum.*

Sei $\mathbf{H}_u = \langle b_u, c_u, d_u, b_u^z, c_u^z, d_u^z \rangle$, dann gibt es eine zu (4.1) analoge Abbildung $\psi_u : \mathbf{H}_u \to Aut(\mathcal{B}_2) \times Aut(\mathcal{B}_2)$, die durch

g	b_u	c_u	d_u
g^{ψ_u}	$(z, b_{u^{(1)}})$	$(z, c_{u^{(1)}})$	$(1, d_{u^{(1)}})$
$(g^z)^{\psi_u}$	$(b_{u^{(1)}}, z)$	$(c_{u^{(1)}}, z)$	$(d_{u^{(1)}}, 1)$

gegeben ist, mit $u^{(i)} = u_{i+1} u_{i+2} \dots$ für $i \in \mathbb{N}$. Daraus sieht man, daß ψ_u eine Einbettung von $\mathbf{H}_u$ in $\mathbf{G}_{u^{(1)}} \times \mathbf{G}_{u^{(1)}}$ ist (mit $\mathbf{G}_{u^{(1)}} = \langle z, b_{u^{(1)}}, c_{u^{(1)}}, d_{u^{(1)}} \rangle$).
Da mit dem Wort u auch alle $u^{(i)}$ und somit die Erzeuger für $\mathbf{G}_{u^{(i)}}$ bestimmt sind, läßt sich ähnlich wie im letzten Abschnitt argumentieren, wenn man alle $\mathbf{G}_{u^{(i1)}}$ simultan betrachtet.
Es sei darauf hingewiesen, daß die Gruppe des letzten Abschnitts in dieser Notation durch das Wort $u = 012012\dots$ definiert ist.

Für ungerades p muß man vorsichtiger vorgehen, um endlich erzeugte p-Gruppen mit intermediärem Wachstum zu konstruieren. Hierzu verweise ich auf [13] und [7, 8], weil sonst der Rahmen dieser Arbeit gesprengt würde.

Eine Gruppe ist eine *residuell endliche-p Gruppe* (p eine Primzahl), wenn der Durchschnitt aller Normalteiler, deren Index eine endliche p-Potenz ist, trivial ist. Ist die p-Gruppe $\mathbf{G}$ isomorph zu einer Untergruppe von $Aut(\mathcal{B}_p)$, dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Untergruppe $\mathbf{N}_n$ von $\mathbf{G}$, die alle Äste der Länge n punktweise fest läßt wegen a) ein Normalteiler von endlichem Index $\leq p^n!$. Da jedes homomorphe Bild einer p-Gruppe aber wieder eine p-Gruppe ist, gilt $|\mathbf{G}/\mathbf{N}_n| = p^{k_n}$, mit $k_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $\bigcap_{n \geq 1} \mathbf{N}_n = 1$, so daß $\mathbf{G}$ eine residuell endliche-p Gruppe ist. Also sind alle Gruppen aus Satz 14 residuell endliche-2 Gruppen. Auch die Gruppen aus [13, 7, 8] sind residuell endliche-p Gruppen. Außerdem haben alle diese Gruppen auch die Eigenschaft, daß jeder nicht-triviale Normalteiler endlichen Index hat, wie in den oben genannten Arbeiten gezeigt wird.

4.4 Residuell endliche-p Gruppen und ihre assoziierten Algebren

Für diesen Abschnitt sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen.

Sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe und $\mathcal{A} = \mathbb{F}_p\mathbf{G}$ die Gruppenalgebra von $\mathbf{G}$ über $\mathbb{F}_p$, d.h. jedes Element a aus $\mathcal{A}$ hat die Form $a = \sum_{g\in\mathbf{G}} k_g g$, mit $k_g \in \mathbb{F}_p$ und $k_g = 0$ für fast alle (d.h. bis auf endlich viele) $g \in \mathbf{G}$, und die Addition und Multiplikation sind gegeben durch

$$\sum_{g\in\mathbf{G}} k_g g + \sum_{g\in\mathbf{G}} k'_g g = \sum_{g\in\mathbf{G}} (k_g + k'_g) g \quad \text{und}$$

$$(\sum_{g\in\mathbf{G}} k_g g)(\sum_{g\in\mathbf{G}} k'_g g) = \sum_{g\in\mathbf{G}} k''_g g \quad \text{mit} \quad k''_g = \sum_{h\in\mathbf{G}} k_h k'_{h^{-1}g}$$

Die Algebra $\mathcal{A}$ ist assoziativ und hat eine Eins, nämlich $1 = 1_{\mathbb{F}_p} 1_{\mathbf{G}}$. Das *Fundamentalideal* $\Delta_{\mathbf{G}} = \Delta$ ist das von $\{g - 1 \mid g \in \mathbf{G}\}$ erzeugte Ideal in $\mathcal{A}$, wobei $g \in \mathbf{G}$ mit $1_{\mathbb{F}_p} g \in \mathcal{A}$ identifiziert wird.
Die assoziativen Potenzen von Δ, die induktiv durch $\Delta^1 = \Delta$ und

$$\Delta^{i+1} = \Delta^i \Delta = \{\alpha\beta \mid \alpha \in \Delta^i,\, \beta \in \Delta\}$$

definiert sind, bilden eine absteigende Kette von Idealen in $\mathcal{A}$, mit $\Delta^i\Delta^j \subset \Delta^{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe dieser Ideale werden nun die *Dimensionsuntergruppen* $\mathbf{G}_{(i)} = \{g \in \mathbf{G} \mid g - 1 \in \Delta^i\}$ von $\mathbf{G}$ definiert.

Lemma 14 *Mit den obigen Bezeichnungen gelten*

i) $\mathbf{G}_{(1)} = \mathbf{G}$ *und* $\mathbf{G}_{(i)}$ *ist normal in* $\mathbf{G}$

ii) $[\mathbf{G}_{(i)}, \mathbf{G}_{(j)}] \subset \mathbf{G}_{(i+j)}$

iii) $\mathbf{G}^p_{(i)} \subset \mathbf{G}_{(pi)}$

Beweis: Seien $g \in \mathbf{G}_{(i)}$, $g' \in \mathbf{G}_{(j)}$ und $h \in \mathbf{G}$.
Aussage i) folgt aus der Definition von Δ und wegen $h^{-1}gh - 1 = h^{-1}(g-1)h \in \Delta^i$.
Teil ii) ergibt sich aus $g^{-1}g'^{-1}gg' - 1 = g^{-1}g'^{-1}(gg' - g'g) = g^{-1}g'^{-1}((g-1)(g'-1) - (g'-1)(g-1)) \in \Delta^{i+j}$.
Und wegen $g^p - 1 = (g-1)^p \in \Delta^{ip}$ gilt iii).

Eine Reihe $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \supset \mathbf{G}_2 \supset \ldots$, die i), ii) und iii) aus Lemma 14 erfüllt heißt *p-Zentralreihe*. Es läßt sich zeigen ([31] S. 38,[32]), daß die Dimensionsuntergruppen auf zwei Weisen rein gruppentheoretisch definiert werden können:

Satz 15 *Sei* $(\mathbf{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *die absteigende Zentralreihe (s. 2.1) der Gruppe* $\mathbf{G}$*. Dann gelten mit den obigen Bezeichnungen*

i) $\mathbf{G}_{(1)} = \mathbf{G}$ *und* $\mathbf{G}_{(i)} = [\mathbf{G}_{(i-1)}, \mathbf{G}](\mathbf{G}_{(k)})^p$*, wobei* $k \in \mathbb{N}$ *durch* $p(k-1) < n \leq pk$ *gegeben ist. Dieses* k *wird auch mit* $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ *bezeichnet.*

ii) $\mathbf{G}_{(i)} = \prod_{np^m \geq i} (\mathbf{G}_n)^{p^m}$

Aus Lemma 14 ist ersichtlich, daß die Faktoren $\mathbf{G}_{(i)}/\mathbf{G}_{(i+1)}$ elementar abelsche p-Gruppen sind, d.h. jedes nicht-triviale Element hat Ordung p. Betrachtet man diese als $\mathbb{F}_p$-Vektorräume, indem man sie additiv schreibt, dann läßt sich der $\mathbb{F}_p$-Vektorraum $\mathcal{L} = \bigoplus_{i\geq 1} \mathbf{G}_{(i)}/\mathbf{G}_{(i+1)}$ wie folgt zu einer graduierten Lie-p-Algebra machen:
Die homogene Komponente vom Grad i ist $\mathbf{G}_{(i)}/\mathbf{G}_{(i+1)}$. Sind $g\mathbf{G}_{(i+1)}$ und $h\mathbf{G}_{(j+1)}$ homogen vom Grad i bzw. j, dann definiere

$$[g\mathbf{G}_{(i+1)}, h\mathbf{G}_{(j+1)}] = [g,h]\mathbf{G}_{(i+j+1)}$$

Aus der Bilinearität der Abbildung ϕ von Seite 11 folgt, daß sich diese Klammeroperation auf beliebige Elemente von $\mathcal{L}$ fortsetzen läßt. Man muß sich allerdings noch davon überzeugen, daß diese Definition unabhängig von den Repräsentanten g und h ist, was aber auch schon für ϕ gilt.
Außerdem wird die Operation $^{[p]}: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ durch $(g\mathbf{G}_{(i+1)})^{[p]} = g^p\mathbf{G}_{(pi+1)}$ induziert, und die Jacobi-Identität folgt aus der Hall-Witt-Identität. Siehe dazu auch [31] Kapitel VIII und [32].

Zu der assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ läßt sich eine graduierte assoziative $\mathbb{F}_p$-Algebra $\mathcal{G} = \bigoplus_{i\geq 0} \Delta^i/\Delta^{i+1}$ assoziieren, wobei $\Delta^0 = \mathcal{A}$ gesetzt wird. Die homogene Komponente vom Grad i ist Δ^i/Δ^{i+1}. Für homogene Elemente der Form $\overline{x} = x + \Delta^{i+1}$ und $\overline{y} = y + \Delta^{j+1}$ vom Grad i bzw. j wird die Multiplikation durch $\overline{x}\overline{y} = xy + \Delta^{i+j+1} = \overline{xy}$ definiert, die dann linear auf beliebige Elemente von $\mathcal{G}$ fortgesetzt wird.

Ab jetzt sei $\mathbf{G}$ eine endlich erzeugte residuell endliche-p Gruppe, dann sind alle Faktoren $\mathbf{G}_{(i)}/\mathbf{G}_{(i+1)}$ endlich. Definiere $b_i(\mathbf{G}) = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathbf{G}_{(i)}/\mathbf{G}_{(i+1)}$ für $i \geq 1$ und $a_i(\mathbf{G}) = \dim_{\mathbb{F}_p} \Delta^i/\Delta^{i+1}$ für $i \geq 0$. Eine Folgerung aus einem Satz von Jennings ([21] oder [32] Satz 3.3.6) zusammen mit der Tatsache, daß $(\mathbf{G}/\mathbf{G}_{(k)})_{(i)} = \mathbf{G}(i)/\mathbf{G}_{(k)}$ ist, ist

Satz 16 *Mit den Bezeichnungen von oben gilt*

$$\sum_{i\geq 0} a_i(\mathbf{G})x^i = \prod_{n\geq 1} \left(\frac{1-x^{pn}}{1-x^n}\right)^{b_n(\mathbf{G})}$$

Den Zusammenhang zwischen der Folge $a_i(\mathbf{G})$ mit dem Wachtum der Gruppe erklärt jetzt

Lemma 15 *Für jedes endliche Erzeugersystem der Gruppe* $\mathbf{G}$ *gilt* $a_n(\mathbf{G}) \leq w_n(\mathbf{G})$ *für alle* $n \geq 0$.

Beweis: 1. Sei $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\Delta$ die kanonische Projektion.
Aus $a \sum k_g g = \sum k_g((g-1)+1)$ folgt dann $a^\pi = \sum k_g \in \mathbb{F}_p$, also $\mathcal{A}/\Delta \simeq \mathbb{F}_p$, und somit $a_0 = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathcal{A}/\Delta = 1 = w_o$.

2. Aus $(g-1)h = (gh-1) - (h-1)$ und $h(g-1) = (hg-1) - (h-1)$ für alle $g, h \in \mathbf{G}$ folgt, daß Δ der lineare Spann von $\{g-1 \mid g \in \mathbf{G}\}$ ist. Also kann man eine Basis von Δ^i aus Elementen der folgenden Form wählen

$$(g_1-1)(g_2-1)\cdots(g_i-1) \quad \text{für ein} \quad i \geq 1 \quad \text{und} \quad g_1, \ldots, g_i \in \mathbf{G} \tag{4.6}$$

Sei $\mathbf{E}$ ein endliches Erzeugersystem von $\mathbf{G}$ (für unendliche Erzeugersysteme ist nichts zu zeigen) und schreibe $g_j = e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_{l_j}}$ mit $l_j \in \mathbb{N}$, $e_{j_k} \in \mathbf{E}^{\pm 1}$ für $1 \leq k \leq l_j$ und alle $1 \leq j \leq i$. Dann zeigt $(gh-1) = (g-1)(h-1)-(g-1)-(h-1)$, daß sich jeder Faktor in (4.6) auf die Gestalt

$$(g_j - 1) = (e_{j_1} - 1) + (e_{j_2} - 1) + \cdots + (e_{j_{l_j}} - 1) + a_j$$

mit $a_j \in \Delta^2$ bringen läßt. Rechnet man nun das Produkt (4.6) aus , dann folgt

$$(g_1-1)(g_2-1)\cdots(g_i-1) = \Big(\sum (e_{1_{k_1}} - 1)(e_{2_{k_2}} - 1)\cdots(e_{i_{k_i}} - 1)\Big) + a,$$

wobei die Summe über alle $(k_1, \ldots, k_i) \in \{1, \ldots, l_1\} \times \ldots \times \{1, \ldots, l_i\}$ zu nehmen ist, und $a \in \Delta^{i+1}$ gilt, denn in allen anderen Summanden kommt mindestens ein $a_j \in \Delta^2$ vor.

Dies zeigt, daß sich eine Basis von Δ^i/Δ^{i+1} aus Elementen der Form $(e_1-1)(e_2-1)\cdots(e_i-1)$ mit $e_j \in \mathbf{E}^{\pm 1}$ für $1 \leq j \leq i$ wählen läßt. Ein solches Element ist aber in dem linearen Spann der Elemente der Länge (bezüglich $\mathbf{E}$) höchstens i enthalten, also gilt das Lemma.

In [14] beweist Grigorchuk eine viel allgemeinere Fassung von

Satz 17 *Sei $\mathbf{G}$ eine endlich erzeugte residuell endliche-p Gruppe mit subexponentiellem Wachstum. Wenn es ein $n \geq 1$ mit $b_n(\mathbf{G}) = 0$ gibt, dann ist $\mathbf{G}$ fast nilpotent.*

Bevor dieser Satz bewiesen werden kann, brauche ich noch zwei Aussagen, welche auch in [14] zu finden sind.

Lemma 16 *i) Die Lie-p-Algebra $\mathcal{L}$ wird als Lie-p-Algebra von den homogenen Elementen vom Grad 1 erzeugt.*

ii) Sei $\widetilde{\mathcal{L}}$ die von L_1 erzeugte Lie-Unteralgebra von $\mathcal{L}$, d.h. nur die Klammeroperation ist erlaubt. Dann gilt $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \subset \widetilde{\mathcal{L}}$.

Beweis: Sei $L_i = \mathbf{G}_{(i)}/\mathbf{G}_{(i+1)}$ und $\overline{\mathcal{L}}$ die von L_1 erzeugte Lie-p-Algebra. Mit Induktion zeigt man $L_n \subset \overline{\mathcal{L}}$ für alle $n \geq 1$, was für $n = 1$ klar ist. Sei also $n > 1$. Aus Satz 15 i) folgt, daß jedes Element aus L_n eine Summe modulo $\mathbf{G}_{(n+1)}$ von Elementen der Form $[g, h]$ mit $g \in \mathbf{G}_{(n-1)}$, $h \in \mathbf{G}$ und Elementen der Form k^p mit $k \in \mathbf{G}_{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$. Also gilt

$$L_n \subset [L_{n-1}, L_1] + (L_{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor})^{[p]} \subset \overline{\mathcal{L}}$$

nach Induktionsannahme. Damit gilt i).

Da in Lie-p-Algebren $[x, y^{[p]}] = [x, \underbrace{y, y, \ldots, y}_{p-\text{mal}}]$ gilt, und $\mathcal{L}$ wegen Teil i) als Lie-p-Algebra von L_1 erzeugt wird, gilt ii).

Beweis von Satz 17: Ohne Eischränkung ist $\mathbf{G}$ unendlich. Definiere für $n > 1$, $x^{[p^n]} = (x^{[p^{n-1}]})^{[p]}$ induktiv und $x^{[p^0]} = x$. Aus dem Lemma folgt dann

$$\mathcal{L} = \sum_{n \geq 1} L_1^{[p^n]} + [\mathcal{L}, \mathcal{L}]^{[p^n]}$$

Sei $\widetilde{L_n} = \widetilde{\mathcal{L}} \cap L_n$ und $b_k(\mathbf{G}) = 0$, dann ist $\widetilde{L_k} = 0$ und damit $\widetilde{L_n} = 0$ für alle $n \geq k$. Also sind $\widetilde{\mathcal{L}}$ und $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$ endlich-dimensional. Nun kann aber die Dimension eines endlich-dimensionalen Vektorraumes unter der Abbildung $x \mapsto x^{[p]}$ nicht größer werden, und deshalb hat die Teilmenge T der natürlichen Zahlen t, für die $b_t(\mathbf{G}) \neq 0$ gilt die Gestalt

$$T = E \cup \left(\bigcup_{i=1}^{d} F_i \right),$$

wobei E endlich ist und zu jedem $1 \leq i \leq d$ ein $n_i \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $F_i = \{n_i, n_i p, n_i p^2, \ldots\}$ ist. Insbesonder kann man die F_i so wählen, daß es zu jedem $1 \leq i \leq d$ ein $r_i \in \mathbb{N}$ gibt, mit $b_n(\mathbf{G}) = r_i$ für alle $n \in F_i$. Mit Satz 16 gilt dann

$$\sum_{n \geq 0} a_n(\mathbf{G}) x^n = \prod_{n \in E} \left(\frac{1 - x^{pn}}{1 - x^n} \right)^{b_n(\mathbf{G})} \prod_{1 \leq i \leq d} \left(\prod_{n \in F_i} \left(\frac{1 - x^{pn}}{1 - x^n} \right)^{r_i} \right)$$

Aus der Gestalt von F_i folgt aber $\prod_{n \in F_i} \left(\frac{1-x^{pn}}{1-x^n} \right)^{r_i} = (1 - x^{n_i})^{-r_i}$ und somit ist $\sum_{n \geq 0} a_n(\mathbf{G}) x^n$ eine rationale Funktion. Die Folge $a_n(\mathbf{G})$ wächst nach Lemma 10 also entweder exponentiell oder polynomial. Aus der Voraussetzung und Lemma 15 folgt, daß a_n polynomial wächst.
Sei jetzt $\widehat{\mathbf{G}}$ die pro-p Vervollständigung von $\mathbf{G}$, d.h $\widehat{\mathbf{G}}$ ist der inverse Limes aller Faktorgruppen von $\mathbf{G}$ mit endlicher p-Potenz Ordnung. Es gilt dann $a_n(\mathbf{G}) = a_n(\widehat{\mathbf{G}})$ und aus Lazards Charakterisierung analytischer pro-p Gruppen ([23], siehe auch [5] s. 117) folgt, daß $\widehat{\mathbf{G}}$ eine treue lineare Darstellung über dem Körper der p-adischen Zahlen hat. Somit ist auch $\mathbf{G}$ linear und erfüllt dann wegen Satz 9 die Wachstumsalternative. Da $\mathbf{G}$ nach Voraussetzung nicht exponentiell wächst folgt mit Satz 2 die Behauptung.

Bemerkung: Satz 17 ist eine Art lokales Kriterium für polynomiales Wachstum in endlich erzeugten residuell endlichen-p Gruppen, allerdings muß man wissen, daß die Gruppe nicht exponentiell wächst.

Kapitel 5

Wachstumstyperhaltende Einbettungssätze

Seit der Arbeit [19] von Higman, Neumann und Neumann, in der gezeigt wurde, daß sich jede abzählbare Gruppe $\mathbf{G}$ in eine Gruppe $\widehat{\mathbf{G}}$ mit zwei Erzeugern einbetten läßt, sind eine Reihe von Artikeln erschienen, die sich mit der Frage beschäftigen, ob sich zu einer Eigenschaft von $\mathbf{G}$ die Gruppe $\widehat{\mathbf{G}}$ auch mit dieser Eigenschaft wählen läßt. In [30] wurde dies für auflösbare Gruppen bewiesen, wobei die Auflösbarkeitslänge von $\widehat{\mathbf{G}}$ nicht größer als die Auflösbarkeitslänge von $\mathbf{G}$ plus zwei sein muß. Für periodische Gruppen erhalten Phillips und Hickin [33, 18] ein solches Resultat und im Fall von residuell endlichen Gruppen gibt Wilson [43] eine entsprechende Konstruktion an.

Weil in endlich erzeugten nilpotenten Gruppen jede Untergruppe ebenfalls endlich erzeugt ist ([34] 5.2.17), kann $\widehat{\mathbf{G}}$ nicht nilpotent gewählt werden, wenn$\mathbf{G}$ eine abzälbare nicht endlich erzeugte nilpotente Gruppen ist. Ist $\mathbf{G}$ hingegen endlich erzeugt und nilpotent, dann liefert ein Satz von Roman'kov [35] das gewünschte Ergebnis.

In diesem Kapitel soll nun der folgende Satz gezeigt werden.

Satz 18 *Sei $\mathbf{G}$ eine endlich erzeugte Gruppe mit $|\mathbf{G}/\mathbf{G}'| < \infty$, dann läßt sich $\mathbf{G}$ in eine Gruppe $\widehat{\mathbf{G}}$ mit zwei Erzeugern und demselben Wachstumstyp (s.1.1) wie $\mathbf{G}$ einbetten.*
Wenn $\mathbf{G}$ außerdem residuell endlich (π-periodisch) ist, so läßt sich auch $\widehat{\mathbf{G}}$ residuell endlich (π-periodisch) wählen (π ist eine Menge von Primzahlen). Ist $w(\mathbf{G}) = [e^{n^\alpha}]$ für ein $0 < \alpha < 1$, dann gilt sogar $w(\widehat{\mathbf{G}}) = w(\mathbf{G})$.

5.1 Werkzeug

Alle oben erwähnten Einbettungssätze ergeben sich mehr oder weniger in zwei Schritten. Als erstes wird die Gruppe $\mathbf{G}$ in die Kommutatorgruppe einer Gruppe $\mathbf{H}$ eingebettet und im zweiten Schritt wird eine 2-erzeugte Gruppe konstruiert, die eine isomorphe Kopie von $\mathbf{H}'$ enthält. In beiden Schritten spielt das standard Kranzprodukt (s.1.3) eine entscheidende Rolle.

Lemma 17 *[19] Sei* $\mathbf{G}$ *eine Gruppe,* $g \in \mathbf{G}$ *und* $\mathbf{Z} = \langle z \rangle$ *eine zyklische Gruppe, deren Ordnung ein Vielfaches der Ordnung von* g *oder unendlich ist, sowie* $\mathbf{K} = \mathbf{G} \wr \mathbf{Z}$ *das uneingeschränkte standard Kranzprodukt von* $\mathbf{G}$ *mit* $\mathbf{Z}$. *Dann ist das Bild von* g *unter der diagonalen Einbettung ein Kommutator in* $\mathbf{K}$.

Beweis: Definiere $\breve{g} \in B(\mathbf{K})$ durch $\breve{g}(z^i) = g^{-i}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$[\breve{g}, z](z^i) = \breve{g}^{-1}(z^i)\breve{g}(z^{i-1}) = g^i g^{-(i-1)} = g \qquad \text{für alle } i \in \mathbb{Z},$$

da die Ordnung von g die Ordnung von z teilt, q.e.d.
Bemerkung: Ebenso ergibt sich $[\breve{g}, z^j](z^i) = g^j$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Lemma 18 *Sei* $\mathbf{G}$ *eine Gruppe mit* $|\mathbf{G}/\mathbf{G}'| = m < \infty$ *und* $\mathbf{Z} = \langle z \rangle$ *eine zyklische Gruppe der Ordnung* m, *sowie* $\mathbf{K} = \mathbf{G} \wr \mathbf{Z}$. *Dann ist das Bild unter der diagonale Einbettung von* $\mathbf{G}$ *enthalten in* $\mathbf{K}'$.

Beweis: Offensichtlich gilt $B(\mathbf{G}' \wr \mathbf{Z}) \subset \mathbf{K}'$ und somit auch $\mathbf{G}'^{\Delta} \subset \mathbf{K}'$. Weiter definiere zu jedem $g \in \mathbf{G} \setminus \mathbf{G}'$ ein $\breve{g} \in B(\mathbf{K})$ wie im Beweis von Lemma 17. Dann gilt

$$[\breve{g}, z](z^i) = \breve{g}^{-1}(z^i)\breve{g}(z^{i-1}) = \begin{cases} g & \textit{für} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m-1\} \\ g^{-(m-1)} & \textit{für} \quad i = 0 \end{cases}$$

Wegen $g^{-(m-1)} = gg^{-m} \in g\mathbf{G}'$ und $B(\mathbf{G}' \wr \mathbf{Z}) \subset \mathbf{K}'$, gibt es ein $k_g \in \mathbf{K}'$ mit $g^{\Delta} = [\breve{g}, z]k_g \in \mathbf{K}'$, womit das Lemma bewiesen ist .

Lemma 19 *Sei* $\mathbf{G}$ *eine endlich erzeugte Gruppe, die von* $g_1, \ldots, g_d$ *erzeugt wird, und sei* $\mathbf{Z} = \langle z \rangle$ *eine zyklische Gruppe mit* $|\mathbf{Z}| \geq 2^d$. *Dann enthält das Kranzprodukt* $\mathbf{K} = \mathbf{G} \wr \mathbf{Z}$ *eine 2-erzeugt Untergruppe* $\mathbf{U}$, *mit* $\mathbf{G}'^{\Delta} \subset \mathbf{U}$.

Beweis: In der Basisuntergruppe von $\mathbf{K}$ gibt es ein Element b mit

$$b(z^i) = \begin{cases} g_{j+1} & \text{falls} \quad i = 2^j - 1 \text{ für ein } j \in \{0, 1, \ldots, d-1\} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt jetzt

$$[b^{z^{-2^k+1}}, b^{z^{-2^l+1}}](z^i) = [b(z^{i+2^k-1}), b(z^{i+2^l-1})] = \begin{cases} [g_{k+1}, g_{l+1}] & \text{für } i = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus folgt, daß die von b und z erzeugte Untergruppe das Bild von $\mathbf{G}'$ unter der 1-Komponenten-Einbettung ι_1 enthält. Das widerum reicht für den Beweis, da $\mathbf{G}'^{\iota_z}$ und $\mathbf{G}'^{\iota_{z'}}$ für alle $z, z' \in \mathbf{Z}$ konjugiert sind in $\mathbf{K}$ (die rechtsreguläre Darstellung ist transitiv).

Lemma 20 *[25] Sei* $\mathbf{K} = \mathbf{G} \wr \mathbf{Z}$ *das uneingeschränkte standard Kranzprodukt der Gruppe* $\mathbf{G}$ *mit der unendlich zyklischen Gruppe* $\mathbf{Z} = \langle z \rangle$ *und sei zu jedem* $g \in \mathbf{G}$ *ein* $\breve{g} \in B(\mathbf{K})$ *definiert wie in Lemma 17. Dann ist die Gruppe* $\mathbf{U} = \langle \breve{g}, z \,|\, g \in \mathbf{G} \rangle$ *nilpotent, wenn* $\mathbf{G}$ *nilpotent ist.*

Beweis: Sei $\mathbf{B} = \mathbf{U} \cap B(\mathbf{K}) = \langle \breve{g}^{z'} \,|\, z' \in \mathbf{Z},\, g \in \mathbf{G} \rangle$ und $\mathbf{D} = \mathbf{G}^{\triangle}$. Dann ist $\mathbf{U} = \mathbf{BZ}$ und weil $\mathbf{D}$ von $\mathbf{Z}$ zentralisiert wird, ist $\mathbf{N} = \mathbf{D}^{\mathbf{B}}$ normal in $\mathbf{U}$, und somit auch die in $\mathbf{N}$ charakteristischen Untergruppen $\mathbf{N}_n$, wobei mit $\mathbf{G}_n$ die Terme der absteigenden Zentralreihe der Gruppe $\mathbf{G}$ bezeichnet werden. Dann gelten

a) $[\mathbf{B}_n, \mathbf{Z}] \subset \mathbf{N} \cap \mathbf{B}_n$

b) $[\mathbf{N}_n, \mathbf{Z}] \subset \mathbf{N}_{n+1}$

c_n) $\mathbf{U}_{2n} \subset \mathbf{B}_{2n}(\mathbf{N} \cap \mathbf{B}_{2n-1})(\mathbf{N}_2 \cap \mathbf{B}_{2n-2}) \cdots (\mathbf{N}_{n-1} \cap \mathbf{B}_{n+1})\mathbf{N}_n$

d_n) $\mathbf{U}_{2n+1} \subset \mathbf{B}_{2n+1}(\mathbf{N} \cap \mathbf{B}_{2n})(\mathbf{N}_2 \cap \mathbf{B}_{2n-1}) \cdots (\mathbf{N}_n \cap \mathbf{B}_{n+1})\mathbf{N}_{n+1}$

Hier ist es sinnvoll an die Kommutatoridentitäten, die man leicht nachprüft, zu erinnern: Für $x, y, z \in \mathbf{G}$ gelten

$$[xy, z] = [x, z]^y [y, z] \quad \text{und} \quad [x, yz] = [x, z][x, y]^z$$

Der Beweis von a) geht per Induktion über n. Um $[\mathbf{B}, \mathbf{Z}] \subset \mathbf{N}$ zu zeigen, macht man Induktion über die Anzahl der Elemente der Form $\breve{g}^{z'}$, die gebraucht werden, um $b \in \mathbf{B}$ darzustellen. Sei also erst $b = \breve{g}^{z'}$ mit $g \in \mathbf{G}$ und $z' \in \mathbf{Z}$, dann gilt

$$[b, z''] = [\breve{g}, z''^{z'^{-1}}]^{z'} = [\breve{g}, z'']^{z'} \in \mathbf{D} \subset \mathbf{N},$$

da $[\breve{g}, z''] \in \mathbf{D}$ mit der Bemerkung nach Lemma 17 folgt. Ist nun $b = b'\breve{g}^{z'}$ mit $[b', z''] \in \mathbf{N}$, so folgt

$$[b, z''] = [b', z'']^{\breve{g}^{z'}} [\breve{g}^{z'}, z''] \in \mathbf{N},$$

denn beide Faktoren sind in $\mathbf{N}$. Damit ist der Induktionsanfang bewiesen und für $n > 1$ gelten $[\mathbf{B}_n, \mathbf{Z}] \subset \mathbf{B}_n$ und $[\mathbf{B}_n, \mathbf{Z}] \subset [\mathbf{B}, \mathbf{Z}] \subset \mathbf{N}$, also ist a) bewiesen.
Teil b) wird auch mit Induktion über n gezeigt. Für $n = 1$ sei zuerst $d \in \mathbf{D}$, $b \in \mathbf{B}$ und $z' \in \mathbf{Z}$, dann gilt

$$[d^b, z'] = [d, z'^{b^{-1}}]^b = [d, z'd']^b = [d, d']^b [d, z']^{d'b} = [d, d']^b \in [\mathbf{D}, \mathbf{N}]^{\mathbf{B}} = [\mathbf{N}, \mathbf{N}],$$

wobei $d' = [z', b^{-1}] \in [\mathbf{B}, \mathbf{Z}] \subset \mathbf{N}$ nach a) ist. Wieder wie in a) kommt jetzt eine Induktion über die Anzahl der Elemente der Form d^b, die man benötigt, um $k \in \mathbf{N}$ auszudrücken. Sei also $k = k'd^b$ und $[k', z'] \in \mathbf{N}_2$ nach Induktionsannahme, dann ergibt sich

$$[k, z'] = [k'd^b, z'] = [k', z']^{d^b} [d^b, z'] \in \mathbf{N}_2,$$

weil beide Faktoren in $\mathbf{N}_2$ sind. Jetzt sei die Aussage für $n > 1$ bewiesen. Es gilt dann mit Hilfe des Drei-Untergruppen-Lemmas ([34] 5.1.10)

$$[\mathbf{N}_{n+1}, \mathbf{Z}] = [\mathbf{N}_n, \mathbf{N}, \mathbf{Z}] \subset [\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}_n]^{\mathbf{U}} [\mathbf{N}_n, \mathbf{Z}, \mathbf{N}]^{\mathbf{U}} \subset [\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_n]^{\mathbf{U}} [\mathbf{N}_{n+1}, \mathbf{N}]^{\mathbf{U}},$$

was man sofort als Untergruppe von $\mathbf{N}_{n+2}$ identifiziert, woraus b) folgt.
Für die Teile c_n) und d_n), wird zuerst c_1) gezeigt und dann $c_n) \Rightarrow d_n$), sowie $d_n) \Rightarrow c_{n+1}$). Es ist

$$\mathbf{U}_2 = [\mathbf{U}, \mathbf{U}] = [\mathbf{BZ}, \mathbf{BZ}] \subset [\mathbf{B}, \mathbf{B}]^{\mathbf{U}} [\mathbf{B}, \mathbf{Z}]^{\mathbf{U}} \subset \mathbf{B}_2\mathbf{N},$$

nach Teil a), woraus c_1) folgt, da $\mathbf{D} \subset \mathbf{B}$ wegen $g^{\triangle} = [\breve{g}, z] = \breve{g}^{-1}\breve{g}^z \in \mathbf{B}$ ist.

Setzt man jetzt c_n) voraus und betrachtet die beiden Faktoren der rechten Seite von $\mathbf{U}_{2n+1} = [\mathbf{U}_{2n}, \mathbf{U}] \subset [\mathbf{U}_{2n}, \mathbf{B}]^{\mathbf{U}}[\mathbf{U}_{2n}, \mathbf{Z}]^{\mathbf{U}}$, für die wegen a) und $[\mathbf{N}_k \cap \mathbf{B}_l, \mathbf{Z}] \subset \mathbf{N}_{k+1} \cap \mathbf{B}_l$, was aus b) folgt, auch

$$[\mathbf{U}_{2n}, \mathbf{B}]^{\mathbf{U}} \subset \mathbf{B}_{2n+1}(\mathbf{N} \cap \mathbf{B}_{2n}) \cdots (\mathbf{N}_{n-1} \cap \mathbf{B}_{n+2})(\mathbf{N}_n \cap \mathbf{B}_{n+1}) \quad \text{und}$$

$$[\mathbf{U}_{2n}, \mathbf{Z}]^{\mathbf{U}} \subset (\mathbf{N} \cap \mathbf{B}_{2n})(\mathbf{N}_2 \cap \mathbf{B}_{2n-1}) \cdots (\mathbf{N}_n \cap \mathbf{B}_{n+1})\mathbf{N}_{n+1}$$

gelten, denn aus $\mathbf{N} \subset \mathbf{B}$ folgt $[\mathbf{N}_n, \mathbf{B}] \subset \mathbf{N}_n \cap \mathbf{B}_{n+1}$. Also gilt $c_n) \Rightarrow d_n)$. Ebenso liefern

$$[\mathbf{U}_{2n+1}, \mathbf{B}]^{\mathbf{U}} \subset \mathbf{B}_{2n+2}(\mathbf{N} \cap \mathbf{B}_{2n+1}) \cdots (\mathbf{N}_{n-1} \cap \mathbf{B}_{n+3})(\mathbf{N}_n \cap \mathbf{B}_{n+2})\mathbf{N}_{n+1} \quad \text{und}$$

$$[\mathbf{U}_{2n+1}, \mathbf{Z}]^{\mathbf{U}} \subset (\mathbf{N} \cap \mathbf{B}_{2n+1})(\mathbf{N}_2 \cap \mathbf{B}_{2n}) \cdots (\mathbf{N}_n \cap \mathbf{B}_{n+2})(\mathbf{N}_{n+1} \cap \mathbf{B}_{n+1})\mathbf{N}_{n+2},$$

wobei die zwei letzten Faktoren in $\mathbf{N}_{n+1}$ liegen, zusammen mit

$$\mathbf{U}_{2n+2} = [\mathbf{U}_{2n+1}, \mathbf{U}] \subset [\mathbf{U}_{2n+1}, \mathbf{B}]^{\mathbf{U}}[\mathbf{U}_{2n+1}, \mathbf{Z}]^{\mathbf{U}}$$

die Implikation $d_n) \Rightarrow c_{n+1})$.
Wenn $\mathbf{G}$ nilpotent der Klasse k ist, dann ist auch $B(\mathbf{K})$ nilpotent der Klasse k, also sind $\mathbf{N}$ und $\mathbf{B}$ auch nilpotent der Klasse $\leq k$. Teil c_{2k}) lautet also $\mathbf{U}_{2k} \subset 1$, d.h. $\mathbf{U}$ ist nilpotent, q.e.d.

5.2 Beweis von Satz 18

Da die Bedingung $|\mathbf{G}/\mathbf{G}'| < \infty$ nicht in allen Fällen nötig ist, gebe ich hier die Sätze an, die eigentlich bewiesen werden und aus denen Satz 18 folgt.

Satz 19 *Ist $\mathbf{G}$ eine endlich erzeugte Gruppe mit polynomialem Wachstum, dann läßt sich $\mathbf{G}$ in eine 2-erzeugte Gruppe $\widehat{\mathbf{G}}$ mit polynomialem Wachstum einbetten.*

Satz 20 *Sei $\mathbf{G}$ eine endlich erzeugte Gruppe mit intermediärem Wachstum und $|\mathbf{G}/\mathbf{G}'| < \infty$. Dann läßt sich $\mathbf{G}$ in eine 2-erzeugte Gruppe $\widehat{\mathbf{G}}$ mit intermediärem Wachstum einbetten.*
Wenn $\mathbf{G}$ außerdem residuell endlich (π-periodisch) ist, so kann man auch $\widehat{\mathbf{G}}$ residuell endlich (π-periodisch) wählen. Ist $w(\mathbf{G}) = [e^{n^\alpha}]$, $0 < \alpha < 1$, dann gilt $w(\mathbf{G}) = w(\widehat{\mathbf{G}})$.

Die Zusätze fehlen in Satz 19, weil sich der Beweis von Satz 20 auch für Gruppen mit polynomialem Wachstum eignet, wenn $|\mathbf{G}/\mathbf{G}'| \leq \infty$ ist. Satz 19 hingegen ist etwas allgemeiner. Auch für Gruppen mit exponentiellem Wachstum kann man den Beweis von Satz 20 benutzen, obwohl man auch auf die Bedingung $|\mathbf{G}/\mathbf{G}'| \leq \infty$ verzichten kann, wenn man die Resultate benutzt, die am Anfang des Kapitels erwähnt wurden. Somit ist Satz 18 eine Folgerung aus Satz 19 und Satz 20.

Beweis von Satz 19: Nach dem Satz von Gromov ist $\mathbf{G}$ eine endliche Erweiterung einer nilpotenten Gruppe $\mathbf{N}$, die endlich erzeugt ist, da sie endlichen

Index in $\mathbf{G}$ hat. Wählt man $\mathbf{M} = \langle \check{n}, z \,|\, n \in \mathbf{F} \rangle \subset \mathbf{N} \wr \mathbf{Z}$, wobei $\mathbf{F}$ ein endliches Erzeugersystem von $\mathbf{N}$ sei und $\mathbf{Z}$ unendlich-zyklisch, dann zeigt Lemma 20, dass $\mathbf{M}$ eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe ist, und Lemma 17, daß $\mathbf{N}$ in $\mathbf{M}'$ einbettbar ist. Sei $\mathbf{E} = \mathbf{G}/\mathbf{N}$, dann bettet $\mathbf{G}$ nach Lemma 9 in das standard Kranzprodukt $\mathbf{N} \wr \mathbf{E}$ ein. Außerdem sei $\mathbf{A}$ eine alternierende Gruppe vom Grad ≥ 5, in die $\mathbf{E}$ einbettet. Die Existenz eines solchen $\mathbf{A}$ folgt aus der Tatsache, daß jede endliche Grupppe $\mathbf{E}$ in die symmetrische Gruppe $Sym(\mathbf{E})$ einbettbar ist, und falls das Bild von $\mathbf{E}$ nicht in der alternierenden Untergruppe liegt, so multipliziert man alle ungeraden Bilder mit der Transposition (a, b), wobei $a, b \notin \mathbf{E}$. Die so erhaltene Gruppe ist isomorph zu $\mathbf{E}$ und gleichzeitig Untergruppe der alternierenden Gruppe $Alt(\mathbf{E} \cup \{a, b\})$.

Jetzt ist $\mathbf{K} = \mathbf{M} \wr \mathbf{A}$ eine endlich erzeugte Gruppe mit $\mathbf{M}' \wr \mathbf{A} \subset \mathbf{K}'$,weil $\mathbf{A}$ nicht-abelsch einfach ist, und da $\mathbf{N} \wr \mathbf{E}$ nach Lemma 7 in $\mathbf{M}' \wr \mathbf{A}$ einbettet, bettet $\mathbf{G}$ in $\mathbf{K}'$ ein. Mit Lemma 19 findet man eine 2-erzeugte Untergruppe $\widehat{\mathbf{G}}$ von $\mathbf{K} \wr \mathbf{Z}$ mit endlichem zyklischen $\mathbf{Z}$, in die $\mathbf{G}$ eingebettet werden kann. Mit den Lemmata 4 und 6 folgt $w(\widehat{\mathbf{G}}) \preceq w(\mathbf{K} \wr \mathbf{Z}) \preceq w(\mathbf{K})^{|\mathbf{Z}|} \preceq (w(\mathbf{M})^{|\mathbf{A}|})^{|\mathbf{Z}|}$ und da w($\mathbf{M}$) polynomial ist, ist auch das Wachstum von $\widehat{\mathbf{G}}$ polynomial, was den Beweis abschließt.

Beweis von Satz 20: Sei $m = |\mathbf{G}/\mathbf{G}'|$ und d die Kardinalität einer Erzeugermenge von $\mathbf{G}$. Weiter seien $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{Z}$ zyklische Gruppen der Ordnung m bzw. p^d, wobei $2 \leq p \in \mathbb{N}$ und $p \in \pi$, wenn $\mathbf{G}$ eine π-Gruppe ist. Dann ist $\mathbf{G}$ nach Lemma 18 einbettbar in $(\mathbf{G} \wr \mathbf{Y})'$, was wegen Lemma 19 einbettbar ist in eine 2-erzeugte Untergruppe $\widehat{\mathbf{G}}$ von $(\mathbf{G} \wr \mathbf{Y}) \wr \mathbf{Z}$. Wie im Beweis von Satz 19 folgt $w(\widehat{\mathbf{G}}) \preceq w(\mathbf{G})^{mp^d} \prec [e^n]$ wegen der Bemerkung nach Lemma 6.
Die ersten beiden Zusätze gelten, da residuell endliche (π-periodische) Gruppen abgeschlossen unter direkten Produkten und (π-)endlichen Erweiterungen sind, wobei zu beachten ist, dass m eine π-Zahl ist, wenn $\mathbf{G}$ eine π-Gruppe ist.
Aus $(e^{n^\alpha})^K = e^{Kn^\alpha} = e^{(K^{1/\alpha}n)^\alpha} \sim e^{n^\alpha}$ folgt die letzte Behauptung.

Bemerkung: Kürzlich haben Wilson und Zalleski [44] gezeigt, dass das Kranzprodukt $\mathbf{G} \wr \mathbf{H}$ einer konjugierten-separierenden Gruppe $\mathbf{G}$ mit einer endlichen Gruppe $\mathbf{H}$ wieder konjugierten-separierend ist. Dabei heißt eine Gruppe $\mathbf{G}$ *konjugierten-separierend*, wenn es zu je zwei nicht konjugierten Elementen $a, b \in \mathbf{G}$ einen Normalteiler $\mathbf{N}$ von endlichem Index in $\mathbf{G}$ gibt, so dass die Bilder von a und b in $\mathbf{G}/\mathbf{N}$ nicht konjugiert sind. In [44] wird dieses Ergebnis benutzt, um zu zeigen, dass die Grigorchuk-Gruppen aus [10, 11] konjugierten-separierend sind. Ein Blick auf den Beweis von Satz 20 zeigt, dass $\widehat{\mathbf{G}}$ konjugierten-separierend ist, falls $\mathbf{G}$ es war.

Zum Abschluß dieser Arbeit noch eine Frage: Kann man zeigen, daß die Gruppe $\mathbf{U} = \langle \check{g}, z \,|\, g \in \mathbf{E} \rangle \subset \mathbf{G} \wr \mathbf{Z}$ mit unendlich-zyklischem $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{G} = \langle \mathbf{E} \rangle$, $|\mathbf{E}| < \infty$ suexponentielles Wachstum hat, wenn $w(\mathbf{G}) \prec 2^n$ ist?
Falls ja, so könnte man die Bedingung $|\mathbf{G}/\mathbf{G}'| < \infty$ in Satz 18 weglassen.

Literaturverzeichnis

[1] Alëshin, S. V. *Finite automata and the Burnside problem for periodic groups*, Math. Notes **11** (1972)

[2] Andrews, G. E. *The theory of partitions*, Addison-Wesley

[3] H. Bass *The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **23** (1972) 603-614

[4] V. V. Beljaev, N. F. Sesekin *Free subsemigroups in solvable groups*, Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. **12** (1981) No. 3, 13-18

[5] J. D. Dixon, M. P. F. du Sautoy, A. Mann, A. Segal *Analytic pro-p groups*, Cambridge Univ. Press (1991)

[6] l. v.d. Dries *Algorithms and bounds for polynomial rings* in "Logic Colloquium 78" (M. Boffa, D. v. Dalen, K. McAloon (Eds.)) S.147-157, North-Holland, Amsterdam (1979)

[7] J. Fabrykowski, N. Gupta *On groups with subexponential growth functions*, J. Indian Math Soc. **49** (1985) 249-256

[8] J. Fabrykowski, N. Gupta *On groups with subexponential growth functions II*, J. Indian Math Soc. **56** (1991) 217-228

[9] E. Ghys et P. de la Harpe *Sur les groupes hyperboliques d'apres Mikhael Gromov*, Birkhäuser

[10] R.I. Grigorchuk *The Burnside problem for periodic groups*, Funct. Anal. Appl. **14** (1980) 41-43

[11] R.I. Grigorchuk *Construction of p-groups of intermediate growth with a continuum of quotient groups*, Algebra and Logic **23** (1984) 265-273

[12] R.I. Grigorchuk *Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means*, Math. USSR Izv. **25** (1985)

[13] R.I. Grigorchuk *On the growth degree of p-groups and torsion-free groups*, Math. USSR Sb. Vol. **54** (1986) No. 1

[14] R.I. Grigorchuk *On the Hilbert-Poincaré Series of graded algebras associated with groups*, Math. USSR Sb. Vol. **66** (1990) No. 1, 211-229

[15] R.I. Grigorchuk, A. Machi *On a group of intermediate growth that acts on a line by homeomorphisms*, Math. Notes **53** 1993) no. 1-2, 146-157

[16] M. Gromov *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Inst. Publ. Math No. 53 (1981) 53-73

[17] H. Heuser *Analysis I*, B. G. Teubner, Stuttgart

[18] K. Hickin *An embedding theorem for periodic groups*, J. London Math. Soc. (2) **14** (1976) 63-64

[19] G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann *Embedding theorems for groups*, J. London. Math. Soc. **24** (1949) 247-254

[20] W. Imrich, N. Seifter *A bound for groups of linear growth*, Arch. Math. **48** (1987) 100-104

[21] S. A. Jennings *The stucture of the group ring of a p-group over a modular field*, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941) 175-185

[22] Y. K. Kim, A. H. Rhemtulla *Weak maximality condition and polycyclic groups* Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995) 711-714

[23] M. Lazard *Groupes analytiques p-adiques*, Inst. Hautes. Études Scientifiques, Publ. Math. **26** (1965) 389-603

[24] P. Longobardi, M. Maj, A. H. Rhemtulla *Groups with no free subsemigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995) 1419-1427

[25] B. Maier *Einbettung von nilpotent Gruppen zur Erzeugung von Kommutatorrelationen*,Comm. Algebra **10** (1982) 2141-2190

[26] Yu. I. Merzlyakov *On infinite finitely generated periodic groups*, Soviet Math. Dokl. **27** (1983)

[27] J. Milnor *A note on curvature and the fundamental group*, J. Differential Geometry **2** (1968) 1-7

[28] J. Milnor *Growth of finitely generated solvable groups*, J. Differential Geometry **2** (1968) 447-449

[29] J. Milnor *Problem 5605*, Amer. Math. Monthly **75** (1968) 685-686

[30] B. H. Neumann, H. Neumann*Embedding theorems for groups*, J. London. Math. Soc. **34** (1959) 465-479

[31] I. B. S. Passi *Group rings and their augmentation ideals*, Lecture notes in Math., Springer (1979)

[32] D. S. Passmann *The algebraic structure of group rings*, Wiley, New York (1977)

[33] R. E. Phillips *Embedding methods for periodic groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **35** (1977) 238-256

[34] D. J. S. Robinson *Acourse in the theory of groups*, Springer New York, Heidelberg, Berlin (1993)

[35] V. A. Roman'kov *Embedding theorems for nilpotent groups*, Sib. Math. J. **13** (1972) 597-603

[36] J. Tits *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra **20** (1972) 250-270

[37] J. M. Rosenblatt *Invariant measures and growth conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. **193** (1974) 33-53

[38] S. Rosset *A property of groups of subexponential growth*, Proc. Amer. Math. Soc. **54** (1976) 24-26

[39] A. Shalev, J. F. Semple *Combinatorial conditions in residually finite groups I*, J. Algebra **157** (1993) 43-50

[40] A. J. Wilkie, L. v.d. Dries *Gromov's theorem on groups of polynomial growth and elementary logic*, J. Algebra **189** (1984) 349-374

[41] A. J. Wilkie, L. v.d. Dries *An effective bound for groups of linear growth*, Arch. Math. **42** (1984) 391-396

[42] J. S. Wilson *Two generator conditions for residually finite groups*, Bull. London Math. Soc. **23** (1991) 239-248

[43] J. S. Wilson *Embedding theorems for residually finite groups*, Math. Z. **174** (1980) 149-157

[44] J. S. Wilson, P. A. Zalesskii *Conjugacy separability of certain torsion groups*, preprint

[45] J. A. Wolf *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry **2** (1968) 421- 446

[46] E. Zelmanov *The solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent*, Izv. AN SSSR **54** (1990)

Ich versichere, daß ich diese Diplomarbeit selbständig und ausschli eßlich mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Datum Unterschrift