
Stern-Brocot-Brüche, Graphen und die Modulgruppe

Diplomarbeit

Vorgelegt von:

Hendrik
Demmer
aus Erlangen

Betreuer:

Prof. Dr. Horst S.
Holdgrün

Kobetreuer:

Dr. Alexander D.
Rahm

angefertigt am

Mathematischen Institut

der

Georg-August-Universität Göttingen

März 2011

Abstract

Die Modulgruppe besitzt eine bekannte Struktur als freies Produkt der zyklischen Gruppen der Ordnungen zwei und drei. Wir entwickeln eine Formel, die die Matrixkoeffizienten eines Elements mit der Länge des zugehörigen Wortes in der freien Gruppe in Verbindung setzt. Als Ausgangspunkt dient ein zum Serre'schen Graphen isomorpher Baum, der aus den Stern-Brocot-Brüchen konstruiert wird. Im zweiten Teil der Arbeit werden spezielle Fundamentalbereiche in diesem Baum verwendet, um zu koendlichen Untergruppen der Modulgruppe ein System unabhängiger Erzeuger zu finden. Schließlich wird mittels dieses graphentheoretischen Ansatzes die Existenz des von Ravi S. Kulkarni eingeführten Farey-Symbols gezeigt.

The modular group has the well-known structure of a free product of cyclic groups of the orders two and three. We derive a correspondence between the matrix coefficients of an element and its word length in the free product. To do that, we construct from the set of Stern-Brocot fractions a tree which is isomorphic to Serre's graph. In the second part, we use special fundamental domains in this tree to find a set of independent generators for co-finite subgroups of the modular group. Finally, we use this graph-theoretic approach to show the existence of Ravi S. Kulkarni's Farey symbol.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Notation	2
Zur Bezeichnung der Erzeuger der Modulgruppe	3
I Die Struktur der Modulgruppe	5
1 Graphen	5
1.1 Definition	5
1.2 Orientierungen	6
1.3 Pfade	9
1.4 Zykel	11
1.5 Bäume	13
2 Stern-Brocot-Brüche	15
2.1 Definition	15
2.2 Signatur	16
2.3 Medianten und Eltern	18
2.4 Die Modulgruppe	30
3 Die Modulgruppe und die Wortlängenmetrik	31
3.1 Der Graph G	31
3.2 Der Graph G^*	38
3.3 Ein Beweis für die Gruppenstruktur der Modulgruppe	42
3.4 Die Wortlängenmetrik auf der Modulgruppe	46
3.5 Die Wortlängenmetrik und Pfade in G^*	52
3.6 Der euklidische Algorithmus und die Modulgruppe	54
4 Die Operation der Modulgruppe auf G^*	55
4.1 Die Operation und ihre Fixpunkte	55
4.2 Die obere Halbebene und der Serre'sche Graph	59

II	Untergruppen der Modulgruppe	62
5	Spezielle Fundamentalbereiche	62
5.1	Fundamentalbereiche	62
5.2	Seitenpaarungen	67
5.3	Unabhängige Erzeuger	73
5.4	Freie Untergruppen	80
5.5	Die Kommutatoruntergruppe der Modulgruppe	81
6	Die Potenzuntergruppen der Modulgruppe	83
6.1	Die Untergruppe der zweiten Potenz	84
6.2	Die Untergruppe der dritten Potenz	86
6.3	Normalteiler, die Elemente endlicher Ordnung enthalten	87
6.4	Höhere Potenzen	88
7	Existenz des Farey-Symbols	88
	Zusammenfassung und Ausblick	96
	Danksagung	97
	Abbildungsverzeichnis	98
	Literatur	99

Einleitung

Die Modulgruppe wurde im 19. Jahrhundert entdeckt und spiegelt bedeutende Entwicklungen dieser Zeit, zuvorderst in Gruppen- und Funktionentheorie, wider. Ihre Untersuchung führte seither zu einer ganzen Reihe „Modularer Wunder“ [Sti01], tiefliegende und verblüffende Zusammenhänge in mathematische Gebiete wie die Zahlentheorie, die sie auch nach fast anderthalb Jahrhunderten zum Gegenstand aktueller Forschung macht.

Unter den vielen Eigenschaften der Modulgruppe bilden zwei das Spannungsfeld, in dem sich die vorliegende Arbeit bewegt: Ihr Aufbau als - beinahe - Matrixgruppe sowie ihre Struktur als freies Produkt. Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile.

Im ersten Teil, der die Kapitel 1 bis 4 umfasst, geht es um die Frage, ob die Wortlänge im freien Produkt zu einem Element aus dessen Matrixkoeffizienten errechnet werden kann.

Der zweite Teil, der aus den Kapiteln 5 bis 7 besteht, greift eines der ältesten Resultate über Untergruppen der Modulgruppe auf: Aus einem Fundamentalbereich lassen sich Erzeuger der Untergruppe errechnen [KF90]. Diese sind im allgemeinen jedoch nicht unabhängig voneinander, erfüllen also zusätzliche Relationen. Ziel der Untersuchung ist es, ein unabhängiges Erzeugendensystem in Matrixform zu finden.

Im folgenden soll ein kurzer Überblick zum Verlauf der Untersuchung, einhergehend mit einem kurzen Kommentar zu jedem Kapitel, gegeben werden:

Die Graphentheorie im ersten Kapitel folgt der Notation von Serre [Ser80], wird bis auf einige Beweise elementarer Aussagen aber eigenständig entwickelt. Die allgemeine Theorie Serres über Bäume und Amalgame wird nicht verwendet, entsprechend verallgemeinerbare Sätze sind aber mit Verweisen darauf versehen.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Formulierung des Begriffs der Stern-Brocot-Brüche. Die (üblicherweise namensgebende) Herangehensweise an diese Struktur der Brüche sind Farey-Folgen. Da sie jedoch bereits einen andersgearteten Zusammenhang zur Modulgruppe [Apo76, Sect. 5.4] besitzen und die Beschränkung ihrer Nenner eher hinderlich ist, entschied sich der Autor für die Benennung nach Stern [Ste58] und Brocot [Bro61], die sie unabhängig von Farey- und voneinander – entdeckten. Der nach ihnen benannte Baum [GKP89, Sect. 4.5] lässt sich als Subgraph des Graphen G wiederfinden (siehe Abbildung M, S. 95).

Dieser Graph G wird im dritten Kapitel aus den Stern-Brocot-Brüchen konstruiert und erlaubt wiederum die Konstruktion des Baumes G^* . Die Benennung von G und G^* bezieht sich auf ihre Dualität in einem naiven, geometrischen Sinn. Dies wird hier nicht weiter ausgeführt. Der Graph G^* wird verwendet, um die

freie Erzeugtheit der Modulgruppe zu beweisen. Dies erlaubt dann eine Untersuchung der Wortlängenmetrik und schließlich ein Resultat über ihre Beziehung zu den Matrixkoeffizienten. Inspiration zu diesem Kapitel waren Kulkarni [Kul91], Alperin [Alp05] und Vepstas [Vep04].

Das vierte Kapitel untersucht die Operation der Modulgruppe auf G^* sowie auf der Einbettung von G^* in der oberen Halbebene. Hiermit wird der erste Teil dieser Arbeit abgeschlossen und der zweite vorbereitet.

In Kapitel 5 wird die Existenz eines speziellen Fundamentalbereichs zu jeder Untergruppe gezeigt, der immer ein unabhängiges System von Erzeugern liefert. Er ist das graphentheoretische Analogon zum *special polygon* bei Kulkarni, dessen Arbeit der Prototyp für dieses Kapitel war: Die Lemmata 5.18, 5.19 und 5.20 zusammen mit Satz 5.25 sind eine graphentheoretische Formulierung des zentralen Satzes [Kul91, Theorem 6.1]. Als Anwendung werden in Kapitel 5.5 freie Erzeuger der Kommutatoruntergruppe Γ' errechnet.

Im vorletzten Kapitel werden die Gruppen Γ^n betrachtet und einige Ergebnisse von Newman [New62, New64] mit der nun entwickelten Theorie nachvollzogen. Das Schlußkapitel widmet sich der Existenz des Farey-Symbols aus [Kul91].

Notation

- Die Null sei keine natürliche Zahl.
- Mit „ \subset “ sei „ist Teilmenge von oder gleich“ gemeint.
- Die Kardinalität einer Menge X werde mit $\#X$ bezeichnet.
- id_A bezeichne die Identitätsabbildung auf einer Menge A .
- Die Einschränkung einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ auf $X \subset A$ werde mit $f|_X$ bezeichnet.
- Sind A und B Mengen, dann sei $A \setminus B$ das Komplement von B in A . Mit $A \dot{\cup} B$ sei die disjunkte Vereinigung von A und B gekennzeichnet.
- Zu $p, q \in \mathbb{Z}$ sei $\text{ggT}(p, q)$ ihr größter gemeinsamer Teiler.
- Bezeichne $\det A$ die Determinante einer Matrix A und $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ die Gruppe der ganzzahligen $n \times n$ -Matrizen mit Determinante eins.

Zur Bezeichnung der Erzeuger der Modulgruppe

Die Modulgruppe Γ ist definiert als die Quotientengruppe von $SL_2(\mathbb{Z})$ nach dem Normalteiler

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \right\}.$$

Elemente von Γ haben die Form

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} -a & -b \\ -c & -d \end{array} \right) \right\}$$

für $a, b, c, d, \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = (-a)(-d) - (-b)(-c) = 1$. Dies werde zur Vereinfachung der Notation als

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

geschrieben. Mit

$$I := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

werde das Einselement in Γ bezeichnet.

Die Erzeuger von Γ sind traditionell

$$T := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entsprechend der Möbiustransformationen $t: z \mapsto \frac{-1}{z}$ und $s: z \mapsto z+1$. Diese klassischen Bezeichnungen finden sich bei Klein und Fricke [KF90], und auch in modernen Büchern, etwa bei Newman [New72].

Es gilt $T^2 = I$, und $(TS)^3 = I$. Die Modulgruppe Γ ist isomorph zum freien Produkt der zyklischen Gruppen der Ordnungen 2 und 3, die von T und TS erzeugt werden (siehe etwa [KF90] oder [Alp93] für einen besonders kurzen Beweis).

In der Literatur gehen die Bezeichnungen für S , T und TS stark auseinander. Für die vorliegende Arbeit ist es geeignet nicht (in klassischer Bezeichnung)

$$TS = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

sondern die dazu transponierte Matrix

$$U := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

zu verwenden. Der Erzeuger der Ordnung 2 soll mit

$$V := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bezeichnet werden. Es gilt $\Gamma^t = \Gamma$ nach Definition der Modulgruppe. Genauer ist

$$A \mapsto (A^t)^{-1}, A \in \Gamma,$$

sogar ein Gruppenautomorphismus, so daß deutlich wird, daß sowohl

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

als auch

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

als Erzeuger des freien Produkts verwendet werden können.

Teil I

Die Struktur der Modulgruppe

1 Graphen

1.1 Definition

Ein **Graph** G besteht aus einer Menge $V(G)$, einer Menge $E(G)$, sowie Abbildungen

$$(o, t) : E(G) \rightarrow V(G) \times V(G), y \mapsto (o(y), t(y)),$$

und

$$\bar{\cdot} : E(G) \rightarrow E(G), y \mapsto \bar{y},$$

die für jedes $y \in E(G)$ die folgenden drei Eigenschaften erfüllen:

$$(GRA1) \quad \bar{\bar{y}} = y,$$

$$(GRA2) \quad \bar{y} \neq y \text{ und}$$

$$(GRA3) \quad o(y) = t(\bar{y}).$$

Zur Unterscheidung verschiedener Graphen wird gelegentlich o_G , t_G und $\bar{\cdot}^G$ geschrieben werden.

Elemente aus $V(G)$ werden **Ecken** (engl. *vertices*), Elemente aus $E(G)$ **Kanten** (engl. *edges*) genannt. Ein Graph G heißt **endlich**, wenn $V(G)$ und $E(G)$ endlich sind. Aus (GRA1) und (GRA3) folgt $o(\bar{y}) = t(\bar{\bar{y}}) = t(y)$, das Anwenden von $\bar{\cdot}$ entspricht also der Umkehrung einer Kante. Daher wird \bar{y} die zu y **umgekehrte** Kante genannt. Die Abbildung $\bar{\cdot}$ ist wegen (GRA1) eine Involution und damit bijektiv.

Die Ecke $o(y)$ einer Kante wird **Anfangspunkt** (frz. *origine*), die Ecke $t(y)$ **Endpunkt** (frz. *sommet terminal*) genannt. Existiert zu zwei Ecken $a, b \in V(G)$ eine Kante y mit $o(y) = a$ und $t(y) = b$, so heißen die Ecken **benachbart** beziehungsweise durch y **verbunden**. Da es zu jeder Kante eine Umgekehrte gibt, ist die Relation „benachbart“ auf der Menge der Ecken symmetrisch.

Ein Graph H heißt **Subgraph** oder **Teilgraph** von G , wenn $V(H) \subset V(G)$, $E(H) \subset E(G)$ gilt und die Abbildungen $o, t, \bar{\cdot}$ auf H Einschränkungen derer auf G sind.

Der **leere Graph** \emptyset ist durch $V(\emptyset) = \emptyset$ und $E(\emptyset) = \emptyset$ gegeben. Er ist Subgraph jedes Graphen.

Seien H_1 und H_2 Subgraphen von G und sei das Symbol \square entweder \cup oder \cap , bezeichne also Vereinigung oder Durchschnitt zweier Mengen. Sei $H := H_1 \square H_2$

durch $V(H) := V(H_1) \sqcup V(H_2)$ und $E(H) := E(H_1) \sqcup E(H_2)$ gegeben. Die Abbildungen o , t und $\bar{}$ auf H seien als Einschränkungen von o_G , t_G und $\bar{}^G$ definiert. Dann ist H ebenfalls ein Subgraph von G . Es sei darauf hingewiesen, daß Vereinigung und Durchschnitt zweier Graphen ausschließlich für Subgraphen desselben Graphen definiert sind.

Sind H_1 und H_2 Subgraphen von G , dann sei der Subgraph $H = H_1 \setminus H_2$ durch $V(H) = V(H_1) \setminus V(H_2)$ und $E(H) = E(H_1) \setminus \{y \in H_1 \mid o(y) \in V(H_2) \vee t(y) \in V(H_2)\}$ definiert.

Sind G und H Graphen, dann heißt ein Paar $\varphi = (\varphi_V, \varphi_E)$ mit $\varphi_V : V(G) \rightarrow V(H)$ und $\varphi_E : E(G) \rightarrow E(H)$ ein (Graphen-) **Homomorphismus**, wenn die Abbildungen φ_V und φ_E mit o , t , und $\bar{}$ auf G und H verträglich sind, also die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} E(G) & \xrightarrow{\varphi_E} & E(H) \\ \downarrow o_G, t_G & & \downarrow o_H, t_H \\ V(G) & \xrightarrow{\varphi_V} & V(H) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E(G) & \xrightarrow{\varphi_E} & E(H) \\ \downarrow \bar{}^G & & \downarrow \bar{}^H \\ E(G) & \xrightarrow{\varphi_E} & E(H) \end{array}$$

kommutieren.

Ein Graphenhomomorphismus φ heißt **injektiv** oder **surjektiv**, wenn φ_V und φ_E beide injektiv beziehungsweise surjektiv sind. Ein **bijektiver** – also injektiver und surjektiver – Graphenhomomorphismus heißt (Graphen-) **Isomorphismus**.

Lemma 1.1. *Seien G, H Graphen und $\varphi = (\varphi_V, \varphi_E) : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus. Dann ist das Bild von φ ein Subgraph von H .*

Beweis. Es muß lediglich gezeigt werden, daß das Bild von φ unter o_H , t_H und $\bar{}^H$ abgeschlossen ist.

Sei dazu $\varphi_E(y)$, $y \in E(G)$, eine beliebige Kante aus $\varphi_E(E(G))$. Dann sind die Ecken $o_H(\varphi_E(y)) = \varphi_V(o_G(y))$ und $t_H(\varphi_E(y)) = \varphi_V(t_G(y))$ in $\varphi_V(V(G))$ enthalten. Ebenso liegt die zu $\varphi_E(y)$ umgekehrte Kante $\varphi_E(\bar{y}) = \varphi_E(\bar{y})$ in $\varphi_E(E(G))$. \square

1.2 Orientierungen

Eine **Orientierung** eines Graphen G ist eine Teilmenge $Y \subset E(G)$, für die $E(G) = Y \dot{\cup} \bar{Y}$, das heißt die disjunkte Vereinigung von Y und \bar{Y} , ist.

Da $\bar{}$ auf ganz $E(G)$ definiert ist und (GRA1) sowie (GRA2) erfüllt, zerfällt $E(G)$ in die disjunkte Vereinigung aller Paare $\{y, \bar{y}\}$, wobei y eine Orientierung von G durchläuft. Eine Orientierung entspricht also der Wahl genau einer Kante aus jedem solchen Paar.

Ein **orientierter Graph** ist ein Paar bestehend aus einem Graphen G und einer Orientierung Y . Ist zu G nur eine Orientierung Y von Interesse, etwa wenn der

Graph wie im folgenden Satz 1.2 aus Y konstruiert wurde, werde diese mit dem Symbol $E_+(G) := Y$ bezeichnet. Dieses $E_+(G)$ ist **die** Orientierung auf G . Taucht zu einem Graphen G ein $E_+(G)$ auf, dann sei dadurch impliziert, daß es sich um einen orientierten Graphen mit der Orientierung $E_+(G)$ handelt. Für einen Subgraphen H von G gelte stets $E_+(H) \subset E_+(G)$.

Definition. Die Abbildung $^+ : E(G) \rightarrow E_+(G)$ sei für Kanten y in einem Graphen G definiert durch $y^+ := y$, falls $y \in E_+(G)$, und $y^+ := \bar{y}$ sonst.

Definition. Für jeden Homomorphismus $\varphi = (\varphi_V, \varphi_E) : G \rightarrow H$ sind $\varphi_E(E_+(G)) \subset E_+(H)$ und $\varphi_E(\overline{E_+(G)}) \subset \overline{E_+(H)}$ äquivalent. Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, dann heiße φ **orientierungserhaltend**.

Satz 1.2. Sind X und Y Mengen mit Abbildungen $\alpha, \omega : Y \rightarrow X$, dann existiert bis auf Isomorphie genau ein Graph G mit den Eigenschaften:

- $V(G) = X$,
- $E_+(G) = Y$ und
- $(o, t)|_Y = (\alpha, \omega)$.

Beweis. Zunächst werde die Existenz eines solchen Graphen gezeigt.

Dazu sei Y_- eine disjunkte Kopie von Y und $\xi : Y \rightarrow Y_-$ die Abbildung, die jedem Element seine Kopie zuordnet. Mit ξ werde auch die Abbildung $Y_- \rightarrow Y$ bezeichnet, die jeder Kopie das Ursprungselement zuweist. Es sei $V(G) := X$, $E(G) := Y \dot{\cup} Y_-$ und $\bar{\cdot} := \xi$. Weiter sei

$$o(y) = \begin{cases} \alpha(y), & \text{falls } y \in Y, \\ \omega(\xi(y)), & \text{falls } y \in Y_-, \end{cases}$$

$$t(y) = \begin{cases} \omega(y), & \text{falls } y \in Y, \\ \alpha(\xi(y)), & \text{falls } y \in Y_-. \end{cases}$$

Für alle $y \in E(G)$ gilt dann $\xi(\xi(y)) = y$, (GRA1), und $\xi(y) \neq y$, (GRA2). Falls $y \in Y$ ist, gilt

$$o(y) = \alpha(y) = \alpha(\xi(\xi(y))) = t(\xi(y)).$$

Falls $y \in Y_-$ ist, gilt

$$t(\xi(y)) = \omega(\xi(y)) = o(y).$$

Also folgt $o(y) = t(\bar{y})$ für alle $y \in E(G)$ und damit (GRA3). Der so entstandene Graph erfüllt die geforderten Eigenschaften nach Konstruktion.

Sei nun H ein anderer Graph mit diesen Eigenschaften. Es soll gezeigt werden, daß

$$\varphi = (\varphi_V, \varphi_E) : G \rightarrow H$$

mit $\varphi_V = \text{id}_X$ und

$$\varphi_E(y) = \begin{cases} y, & \text{falls } y \in Y, \\ \overline{(\xi(y))}, & \text{falls } y \in Y_-, \end{cases}$$

ein Isomorphismus ist. Um die Kanteninvolutionen in G und H zu unterscheiden sei stets ξ zu G und $\bar{\cdot}$ zu H gehörig. Wegen

$$\overline{\varphi_E(\xi(y))} = \begin{cases} \overline{(\overline{(\xi(\xi(y)))})} = y, & \text{falls } y \in Y, \\ \overline{(\xi(y))}, & \text{falls } y \in Y_-, \end{cases} = \varphi_E(y)$$

sind beide Abbildungen mit φ_E verträglich, das heißt das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E(G) & \xrightarrow{\varphi_E} & E(H) \\ \downarrow \xi & & \downarrow \bar{\cdot} \\ E(G) & \xrightarrow{\varphi_E} & E(H) \end{array}$$

Weiter ist

$$o_H(\varphi_E(y)) = \begin{cases} \alpha(y) = \varphi_V(o_G(y)), & \text{falls } y \in Y, \\ t_H(\overline{(\xi(y))}) = t_H(\xi(y)) = \omega(\xi(y)) = \varphi_V(o_G(y)), & \text{falls } y \in Y_-, \end{cases}$$

also stets gleich $\varphi_V(o_G(y))$ und

$$t_H(\varphi_E(y)) = o_H(\overline{\varphi_E(y)}) = o_H(\varphi_E(\xi(y))) = \varphi_V(o_G(\xi(y))) = \varphi_V(t_G(y))$$

für alle $y \in E(G)$. Damit ist φ ein Graphenhomomorphismus. Die Kantenmenge $E(H)$ ist die disjunkte Vereinigung von Y und \bar{Y} , $E(G)$ ist die von Y und Y_- . Da $\varphi_E|_Y : Y \rightarrow Y$ und $\varphi_E|_{Y_-} : Y_- \rightarrow \bar{Y}$ bijektiv sind, ist φ_E bijektiv. Die Eckenabbildung φ_V ist als Identität auf X ebenfalls bijektiv. Also ist φ ein Isomorphismus. \square

Bemerkung 1.3. Ein Subgraph H eines Graphen G ist durch Angabe von $V(H)$ und $E_+(H)$ bereits vollständig definiert.

Satz 1.4. Seien G und H zwei Graphen und seien $\varphi_{E_+} : E_+(G) \rightarrow E(H)$ und $\varphi_V : V(G) \rightarrow V(H)$ Abbildungen, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E_+(G) & \xrightarrow{\varphi_{E_+}} & E(H) \\ \downarrow o_G, t_G & & \downarrow o_H, t_H \\ V(G) & \xrightarrow{\varphi_V} & V(H) \end{array}$$

Dann gibt es genau eine Fortsetzung von φ_{E_+} zu $\varphi_E : E(G) \rightarrow E(H)$, so daß $\varphi = (\varphi_V, \varphi_E)$ ein Homomorphismus von G nach H ist.

Beweis. Für einen Homomorphismus ist die Verträglichkeit von φ_E mit ${}^{-G}$ und ${}^{-H}$ gefordert. Dies läßt nur die Definition

$$\varphi_E(y) := \begin{cases} \varphi_{E_+}(y), & y \in E_+(G), \\ \overline{\varphi_{E_+}(\bar{y})}, & y \in \overline{E_+(G)}, \end{cases}$$

zu, durch welche φ wie gefordert zu einem Homomorphismus wird. \square

Bemerkung 1.5. Sind φ_V und φ_{E_+} in Satz 1.4 injektiv, dann ist auch das resultierende φ injektiv.

1.3 Pfade

Für jedes $n \geq 0$ sei der Pfadgraph P_n (unter Verwendung von Satz 1.2) definiert durch Ecken $V(P_n) = \{0, 1, \dots, n\}$, Kanten $E_+(P_n) = \{(0, 1), (1, 2), \dots, (n-1, n)\}$ und $(o, t)|_{E_+(P_n)}((k, k+1)) = (k, k+1)$, $k = 0, \dots, n-1$. Ein **Pfad** der **Länge** n in einem Graphen G ist ein Homomorphismus $\varphi : P_n \rightarrow G$. Die Ecke $\varphi_V(0)$ heißt **Anfangspunkt**, die Ecke $\varphi_V(n)$ **Endpunkt** von φ . Ein Pfad heißt **injektiv**, wenn er als Graphenhomomorphismus injektiv ist.

Definition. Sei $\varphi : P_n \rightarrow G$ ein Pfad der Länge n in einem Graphen G . Zu Indizes $0 \leq a \leq b \leq n$ sei der Pfad $\varphi|_{[a,b]} : P_{b-a} \rightarrow G$ (mit Satz 1.4) durch

$$(\varphi|_{[a,b]})_V(k) := \varphi(k+a), k = 0, \dots, b-a,$$

und

$$(\varphi|_{[a,b]})_{E_+}((k, k+1)) := \varphi_E((k+a, k+a+1)), k = 0, \dots, b-a-1,$$

definiert. Ein solcher Pfad heiße **Teilpfad** von φ .

Bemerkung 1.6. Jeder Teilpfad eines injektiven Pfades ist selbst injektiv.

Lemma 1.7. Ist $\varphi : P_n \rightarrow G$ ein Pfad mit injektivem φ_V , dann dann ist auch φ_E und damit ganz φ injektiv.

Beweis. Für $0 \leq k \leq l \leq n-1$ mit $\varphi_E((k, k+1)) = \varphi_E((l, l+1))$ gilt

$$\varphi_V(k) = o(\varphi_E((k, k+1))) = o(\varphi_E((l, l+1))) = \varphi_V(l)$$

und damit $k = l$, da φ_V injektiv ist. Gäbe es $0 \leq k \leq l \leq n-1$ mit $\varphi_E((k, k+1)) = \overline{\varphi_E((l, l+1))}$, dann gälte

$$\varphi_V(k) = o(\varphi_E((k, k+1))) = o(\overline{\varphi_E((l, l+1))}) = t(\varphi_E((l, l+1))) = \varphi_V(l+1)$$

und

$$\varphi_V(k+1) = t(\varphi_E((k, k+1))) = t(\overline{\varphi_E((l, l+1))}) = o(\varphi_E((l, l+1))) = \varphi_V(l).$$

Da φ_V injektiv ist, folgte $k = l+1$ und $l = k+1$, was sich selbst widerspräche. Also ist auch φ_E injektiv. \square

Satz 1.8. Seien $\varphi_1 : P_{n_1} \rightarrow G$ und $\varphi_2 : P_{n_2} \rightarrow G$ zwei Pfade der Längen n_1 und n_2 in einem Graphen G . Gelte $(\varphi_1)_V(n_1) = (\varphi_2)_V(0)$. Dann gibt es genau einen Pfad $\varphi : P_{n_1+n_2} \rightarrow G$ der Länge $n_1 + n_2$ mit $\varphi|_{[0, n_1]} = \varphi_1$ und $\varphi|_{[n_1, n_1+n_2]} = \varphi_2$. Wir nennen φ die **Verkettung** von φ_1 und φ_2 .

Gilt $(\varphi_1)_V(k) \neq (\varphi_2)_V(l)$ für alle $(k, l) \neq (n_1, 0)$ und sind φ_1 und φ_2 injektiv, dann ist auch φ injektiv.

Beweis. Sei

$$\varphi_V(k) := \begin{cases} (\varphi_1)_V(k), & \text{falls } 0 \leq k \leq n_1, \\ (\varphi_2)_V(k - n_1), & \text{falls } n_1 \leq k \leq n_1 + n_2, \end{cases}$$

und sei

$$\varphi_{E_+}((k, k+1)) := \begin{cases} (\varphi_1)_E((k, k+1)), & \text{falls } 0 \leq k < n_1, \\ (\varphi_2)_E((k - n_1, k - n_1 + 1)), & \text{falls } n_1 \leq k < n_1 + n_2. \end{cases}$$

Dann sind φ_V und φ_{E_+} miteinander verträglich und es gibt nach Satz 1.4 genau eine Fortsetzung von φ_{E_+} zu φ_E , so daß $\varphi = (\varphi_V, \varphi_E)$ ein Homomorphismus ist. Für diesen Pfad gilt dann $\varphi|_{[0, n_1]} = \varphi_1$ und $\varphi|_{[n_1, n_1+n_2]} = \varphi_2$ nach Definition. Jeder Pfad φ' mit diesen Eigenschaften muß, da er auf zwei überdeckenden Teilpfaden mit φ übereinstimmt, gleich diesem sein.

Gelte nun $(\varphi_1)_V(k) \neq (\varphi_2)_V(l)$ für alle $(k, l) \neq (n_1, 0)$ und seien φ_1 und φ_2 injektiv. Seien $0 \leq k \leq l \leq n_1 + n_2$ mit $\varphi_V(k) = \varphi_V(l)$. Gilt $k, l \leq n_1$ oder $k, l \geq n_1$, dann ist $k = l$, da φ_1 beziehungsweise φ_2 injektiv ist. Andernfalls gilt $k \in \{0, \dots, n_1\}$, $l - n_1 \in \{0, \dots, n_2\}$ und $(\varphi_1)_V(k) = (\varphi_2)_V(l - n_1)$. Daraus folgt nach Voraussetzung $k = n_1$ und $l - n_1 = 0$ und damit $k = l$. Also ist φ_V injektiv und damit nach Lemma 1.7 auch φ . \square

Zwei Ecken a und b eines Graphen heißen **durch einen Pfad verbunden**, wenn es einen Pfad mit Anfangspunkt a und Endpunkt b gibt. Ein solcher Pfad heißt **Verbindung** dieser zwei Ecken. Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn jedes Paar Ecken durch einen Pfad verbunden ist. Durch Umkehrung und Verkettung von Pfaden ist ersichtlich, daß Verbundenheit von Ecken eine Äquivalenzrelation ist. Eine **Zusammenhangskomponente** eines Graphen G ist ein maximaler zusammenhängender Subgraph von G .

Das Bild eines Pfades $\varphi : P_n \rightarrow G$ ist nach Lemma 1.1 ein Subgraph von G . Dabei heißt $V(\varphi) := V(\varphi(P_n))$ die Menge der Ecken, $E(\varphi) := E(\varphi(P_n))$ die Menge der Kanten, die φ **besucht**. Analog sei $E_+(\varphi) := E_+(\varphi(P_n)) \subset E_+(G)$.

Proposition 1.9. Zwei Ecken a und b in einem Graphen G sind genau dann durch einen Pfad verbunden, wenn sie durch einen injektiven Pfad verbunden sind.

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, daß die Verbindung injektiv gewählt werden kann. Sei φ ein Pfad minimaler Länge n in G , der a mit b verbindet. Wäre φ_V nicht injektiv, gäbe es also $0 \leq i < j \leq n$ mit $\varphi_V(i) = \varphi_V(j)$, dann wäre die Verkettung von $\varphi|_{[0,i]}$ und $\varphi|_{[j,n]}$ ein echt kürzerer Pfad, der a mit b verbindet. Dies widerspräche der Wahl von φ . Also ist φ_V injektiv und damit nach Lemma 1.7 auch φ . \square

Lemma 1.10. Sei x der Anfangs- oder Endpunkt eines injektiven Pfades φ der Länge $n > 0$ in G , also $x = \varphi_V(0)$ oder $x = \varphi_V(n)$. Dann gibt es genau eine Kante y aus $E(G)$ mit $t(y) = x$, die von φ besucht wird.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf durch Umkehrung des Pfades angenommen werden, daß x der Anfangspunkt von φ ist. Für $y = \overline{\varphi_E((0,1))}$ gilt $t(y) = \varphi_V(0)$.

Sei $y' \in E(\varphi)$ ungleich $\overline{\varphi_E((0,1))}$. Ist $y' = \varphi_E((0,1))$, dann hat es den Endpunkt $\varphi_V(1)$, welcher von x verschieden ist, da φ_V injektiv ist. Ist $y' = \varphi_E((k, k+1))$ oder $y' = \overline{\varphi_E((k, k+1))}$ für ein $k > 0$, dann ist $t(y') \in \{k, k+1\}$, also ungleich $x = \varphi_V(0)$, ebenfalls da φ_V injektiv ist. \square

Lemma 1.11. Sei φ ein injektiver Pfad der Länge $n \geq 2$ in einem Graphen G und sei $x \in V(\varphi)$ nicht der Anfangs- oder Endpunkt von φ . Dann gibt es genau zwei Kanten y in $E(\varphi)$ mit $t(y) = x$.

Beweis. Sei $0 < k < n$ mit $x = \varphi_V(k)$. Die Teilpfade $\varphi_1 := \varphi|_{[0,k]}$ und $\varphi_2 := \varphi|_{[k,n]}$ sind beide injektiv und haben die Längen $k, n - k > 0$. Jede Kante y in $E(\varphi)$ mit Endpunkt x liegt, da φ_E injektiv ist, entweder in $E(\varphi_1)$ oder in $E(\varphi_2)$. Ist $y \in E(\varphi_1)$, dann ist $t(y) = (\varphi_1)_V(k)$ der Endpunkt des Pfades φ_1 . Nach Lemma 1.10 ist y dadurch eindeutig bestimmt. Ist $y \in E(\varphi_2)$, dann ist $t(y)$ der Anfangspunkt von φ_2 und y dadurch ebenfalls eindeutig bestimmt. \square

Folgerung. In einem injektiven Pfad gibt es zu jeder Ecke höchstens zwei Kanten, die diese Ecke als Endpunkt haben.

Bemerkung 1.12. Lemma 1.10 sowie Lemma 1.11 und seine Folgerung gelten genauso, wenn Kanten mit vorgeschriebenem Anfangspunkt statt Endpunkt gesucht werden.

1.4 Zykel

Für jedes $n \geq 1$ sei (mit Satz 1.2) der Zykelgraph Z_n definiert durch $V(Z_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $E_+(Z_n) = \{(k, k+1) \mid k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ und $(o, t)|_{E_+(Z_n)}((k, k+1)) = (k, k+1)$, $k \in V(Z_n)$. Ein **Zykel** Z der Länge n in einem Graphen G ist ein Subgraph von G , der zu Z_n isomorph ist.

Proposition 1.13. *In einem Zykel Z der Länge $n > 2$ ist jede Ecke zu genau zwei verschiedenen anderen Ecken (und damit insbesondere nicht zu sich selbst) benachbart. Zwei benachbarte Ecken sind durch genau eine Kante und ihre Umgekehrte verbunden.*

Beweis. Sei $\varphi : Z \rightarrow Z_n$ ein Isomorphismus. Die Ecke $a \in V(Z)$ ist genau dann zu $b \in V(Z)$ benachbart, wenn $\varphi_V(a)$ zu $\varphi_V(b)$ in Z_n benachbart ist. Zu $\varphi_V(a) = k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gibt es genau zwei benachbarte Elemente, nämlich $k-1$ und $k+1 \pmod{n}$, die wegen $n > 2$ voneinander verschieden sind.

Seien $a, b \in V(Z)$ benachbart. Eine Kante $y \in E(Z)$ verbindet a und b genau dann, wenn $\varphi_E(y)$ die Ecken $\varphi_V(a)$ und $\varphi_V(b)$ in Z_n verbindet. Nach Definition gibt es in Z_n genau ein Paar aus einer Kante und ihrer Umgekehrten, die dies erfüllen. Da y das Urbild einer dieser Kanten unter der bijektiven Abbildung φ_E ist, gibt es auch in Z nur ein Paar aus einer Kante und ihrer Umgekehrten, die a und b verbinden. \square

Die umgekehrte Aussage davon gilt ebenfalls:

Proposition 1.14. *Sei $X \subset G$ ein endlicher, zusammenhängender Subgraph, in dem jede Ecke zu genau zwei verschiedenen anderen Ecken (und damit insbesondere nicht zu sich selbst) benachbart ist. Weiter gebe es zu je zwei benachbarten Ecken genau ein Paar $\{y, \bar{y}\}$ aus einer Kante und ihrer Umgekehrten, die diese Ecken verbinden. Dann ist X ein Zykel der Länge $\#V(X)$ in G .*

Beweis. Sei a_0 eine beliebige Ecke aus X und a_1 eine dazu benachbarte. Eine unendliche Folge von konsekutiv benachbarten Ecken $(a_k)_{k \geq 0}$ werde konstruiert, indem a_{k+1} als die eindeutig bestimmte Ecke von X festgelegt wird, die zu a_k benachbart und ungleich a_{k-1} ist.

Da X endlich ist, muß es Indizes $m_1 \neq m_2$ geben, so daß $a_{m_1} = a_{m_2}$ ist. Sei m_2 die kleinste ganze Zahl, zu der es ein $m_1 \in \{0, \dots, m_2 - 1\}$ gibt mit $a_{m_1} = a_{m_2}$. Es gilt $m_1 < m_2$. Da a_0, a_1 und a_2 nach Voraussetzung paarweise verschieden sind, ist $m_2 \geq 2$.

Wegen $a_{m_2} = a_{m_1}$ ist a_{m_2-1} zu a_{m_1} benachbart. Wäre $m_1 = m_2 - 1$, dann gälte $a_{m_2} = a_{m_2-1}$. Dies würde der Voraussetzung, daß keine Ecke zu sich selbst benachbart ist, widersprechen. Wäre $m_1 > 0$, dann gälte $a_{m_2-1} = a_{m_1-1}$ oder $a_{m_2-1} = a_{m_1+1}$. Ersteres wäre ein Widerspruch zur Minimalität von m_2 . Im zweiten Fall wären die zu $a_{m_2-1} = a_{m_1+1}$ benachbarten Ecken a_{m_1} und a_{m_2} nicht verschieden, was den Voraussetzungen widerspräche.

Also ist $m_1 = 0$ und damit $a_{m_2} = a_0$. Die Ecke a_{m_2-1} ist zu a_0 benachbart, aber ungleich a_1 . Daher muß a_1 die andere zu a_{m_2} benachbarte Ecke sein: $a_{m_2+1} = a_1$. Sei $n := m_2$. Durch Induktion folgt $a_{k+n} = a_k$ für alle $k \geq 0$. Die Folge (a_k) sei durch diese Relation auf ganz \mathbb{Z} fortgesetzt.

Jedes zu einem Element a_k aus der Folge benachbarte Element liegt nach Konstruktion ebenfalls in der Folge. Angenommen es gäbe eine Ecke x aus $V(X)$, die nicht in der Folge (a_k) vorkommt, dann gäbe es, da X zusammenhängend ist, einen Pfad φ in X , der a_0 mit x verbindet. Zu diesem gäbe es ein kleinstes $l > 0$ mit $\varphi_V(l) \neq a_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Ecke $\varphi_V(l-1)$ wäre ein Element aus der Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ und könnte damit widersprüchlicherweise nicht zu $\varphi_V(l)$ benachbart sein. Also ist jede Ecke von X in der Folge und die Anzahl der Ecken von X ist n .

Sei $\varphi_V : V(Z_n) \rightarrow V(X)$ durch $\varphi_V(k) := a_{\hat{k}}$, $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, gegeben, wobei $\hat{k} \in \mathbb{Z}$ ein beliebiger Vertreter der Restklasse k sei. Diese Definition ist wegen $a_{k+nm} = a_k$, $m \in \mathbb{Z}$, von der Wahl des Vertreters \hat{k} unabhängig.

Sei $\varphi_{E_+} : E_+(Z_n) \rightarrow E(X)$ die Abbildung, die $(k, k+1)$ die eindeutig bestimmte Kante y in X mit $o(y) = \varphi_V(k)$ und $t(y) = \varphi_V(k+1)$ zuordnet.

Nach Konstruktion ist φ_V bijektiv. Das mit Satz 1.4 aus φ_V und φ_{E_+} konstruierte $\varphi = (\varphi_V, \varphi_E)$ ist ein Homomorphismus $Z_n \rightarrow X$. Da φ_V surjektiv ist und jede Kante y von X zwei verschiedene, benachbarte Ecken in X verbindet, gibt es ein $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, so daß entweder $o(y) = \varphi_V(k)$, $t(y) = \varphi_V(k+1)$ oder $o(y) = \varphi_V(k+1)$, $t(y) = \varphi_V(k)$ gilt. Im ersten Fall ist $y = \varphi_E((k, k+1))$, im zweiten ist $y = \varphi_E((k+1, k))$. Also ist φ_E surjektiv. Die Injektivität von φ_E folgt aus $n > 2$ mit einem ähnlichen Argument wie im Beweis von Lemma 1.7. Damit ist φ ein Isomorphismus zwischen Z_n und X . \square

1.5 Bäume

Definition. Ein zusammenhängender Graph ohne Zykel wird **Baum** genannt.

Proposition 1.15. *Sind a, b Ecken in einem Baum G , dann gibt es genau einen injektiven Pfad φ in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b .*

Beweis. [Ser80, Chap. I, Par. 2.2, Prop. 8]. \square

Definition. Ist y eine Kante in einem Graphen G , dann ist durch $V(G') := V(G)$, $E(G') := E(G) \setminus \{y, \bar{y}\}$ ein Subgraph G' von G definiert. Dieser werde mit $G \setminus \{y, \bar{y}\}$ bezeichnet.

Lemma 1.16. *Sei G ein Baum und y eine beliebige Kante in G . Dann besteht der Subgraph $G \setminus \{y, \bar{y}\}$ aus genau zwei Zusammenhangskomponenten. In jeder solchen liegt genau eines, $o(y)$ oder $t(y)$.*

Beweis. Es soll gezeigt werden, daß jede Ecke von $G \setminus \{y, \bar{y}\}$ mit entweder $o(y)$ oder $t(y)$ verbunden ist. Dazu sei a eine beliebige Ecke aus $G \setminus \{y, \bar{y}\}$ und φ der eindeutig bestimmte injektive Pfad in G , der $o(y)$ mit a verbindet (Proposition 1.15).

Fall I. $y \notin E(\varphi)$. Da $E(\varphi)$ als Kantenmenge eines Subgraphen unter $\bar{}$ abgeschlossen ist, liegt auch \bar{y} nicht in $E(\varphi)$. Also kann φ als Pfad in $G \setminus \{y, \bar{y}\}$ aufgefasst werden und verbindet dort $o(y)$ mit a .

Fall II. $y \in E(\varphi)$. Da φ injektiv und $\varphi_V(0) = o(y)$ ist, gilt $\varphi_E((0, 1)) = y$ und damit $\varphi_V(1) = t(y)$. Sei n die Länge von φ . Der Teilpfad $\varphi|_{[1, n]}$, der die erste Ecke ausläßt, verbindet dann die Ecken $t(y)$ und a in $G \setminus \{y, \bar{y}\}$.

Also ist a in $G \setminus \{y, \bar{y}\}$ mit $o(x)$ oder $t(x)$ verbunden.

Die Ecken $o(y)$ und $t(y)$ sind in $G \setminus \{y, \bar{y}\}$ genau dann verbunden, wenn sie durch einen injektiven Pfad verbunden sind (Proposition 1.9). Da der eindeutig bestimmte injektive Pfad, der sie in G verbindet, y enthält, kann dies nicht sein.

Da Verbundenheit von Ecken durch Verkettung von Pfaden eine transitive Eigenschaft ist, besitzt $G \setminus \{y, \bar{y}\}$ genau die zwei Zusammenhangskomponenten von $o(y)$ und $t(y)$. \square

Proposition 1.17. *Sei G ein Baum und seien x und y Kanten aus $E_+(G)$ mit $x \neq y$. Dann gibt es genau einen injektiven Pfad φ mit erster Kante x und letzter Kante y , also $\varphi_E((0, 1))^+ = x$ und $\varphi_E((n-1, n))^+ = y$, wobei n die Länge des Pfades ist.*

Beweis. Die Subgraphen G_x und G_y von G seien durch $G_x := G \setminus \{x, \bar{x}\}$ und $G_y := G \setminus \{y, \bar{y}\}$ definiert. Nach Lemma 1.16 besitzen diese je zwei Zusammenhangskomponenten, die entweder $o(x)$ oder $t(x)$, beziehungsweise $o(y)$ oder $t(y)$ enthalten. Wegen $x, y \in E_+(G)$ gilt $\bar{x} \neq y$, $\bar{y} \neq x$ und damit $x \in E(G_y)$ und $y \in E(G_x)$.

Sei $d_x \in \{o(x), t(x)\}$ diejenige Ecke, die nicht in der Zusammenhangskomponente von y in G_x ist. Analog sei $d_y \in \{o(y), t(y)\}$ diejenige, die nicht in der Zusammenhangskomponente von x in G_y liegt.

Sei φ der eindeutig bestimmte injektive Pfad in G , der d_x mit d_y verbindet. Sei n die Länge von φ . Da φ Punkte aus beiden Zusammenhangskomponenten von G_x enthält, ist x in $E(\varphi)$ enthalten. Da φ injektiv ist, gibt es nach Lemma 1.10 genau eine Kante in $E(\varphi)$ mit $\varphi_V(0)$ als Endpunkt, nämlich $\varphi_E((0, 1))$. Da $\varphi_V(0) \in \{o(x), t(x)\}$ ist, muß $\varphi_E((0, 1))^+ = x$ gelten. Analog ist $\varphi_E((n-1, n))^+ = y$. Also existiert stets ein solcher gesuchter Pfad.

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei φ ein injektiver Pfad der Länge n in G mit $\varphi_E((0, 1))^+ = x$ und $\varphi_E((n-1, n))^+ = y$. Es ist $\varphi_V(0) \in \{o(x), t(x)\}$ und $\varphi_V(n) \in \{o(y), t(y)\}$. Wäre $\varphi_V(0) \neq d_x$, dann läge es in derselben Zusammenhangskomponente von G_x wie y . Der Pfad φ verbände Punkte aus derselben Zusammenhangskomponente von G_x , also könnte x nicht in $E(\varphi)$ enthalten sein. Wäre analog $\varphi_V(n) \neq d_y$, dann läge φ ganz in der Zusammenhangskomponente von x in G_y und könnte die Kante y nicht besuchen. Also ist φ der eindeutig bestimmte injektive Pfad, der d_x mit d_y verbindet. \square

2 Stern-Brocot-Brüche

2.1 Definition

Lemma 2.1. Seien p, q ganze Zahlen, die nicht beide Null sind. Genau dann sind p und q teilerfremd, wenn es ganze Zahlen m, n mit $mq - pn = 1$ gibt.

Beweis. [JJ98, Sect. 1.2, Corollary 1.9]. □

Lemma 2.2. Sind $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $|ad - bc| = 1$, dann gilt $|a||d| - |b||c| = \pm 1$.

Beweis. Es gilt $1 = |ad - bc| \geq ||ad| - |bc|| = ||a||d| - |b||c||$. Wäre $|a||d| - |b||c| = 0$, dann gälte $|ad| = |bc|$ und damit $ad - bc \in 2\mathbb{Z}$, was $|ad - bc| = 1$ widerspräche. Da $|a||d| - |b||c|$ eine ganze Zahl ist, gilt also $|a||d| - |b||c| = \pm 1$. □

Sei

$$Q_0 := \left\{ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\} \mid \text{ggT}(p, q) = 1 \right\}.$$

Die zweielementige Gruppe $\{-1, 1\}$ operiert auf Q_0 durch $e(p, q) = (ep, eq)$, $e \in \{-1, 1\}$. Die Menge Q der **Stern-Brocot-Brüche** sei definiert als die Menge der Bahnen $Q_0/\{-1, 1\}$ unter dieser Operation. Das heißt, für $(p, q), (p', q') \in Q_0$ gelte Äquivalenz $(p, q) \sim (p', q')$ genau dann, wenn es ein $e \in \{-1, 1\}$ mit $(p', q') = (ep, eq)$ gibt.

Eine Äquivalenzklasse $\{(p, q), (-p, -q)\}$ aus Q werde als $\frac{p}{q}$ geschrieben. Es gilt $\frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}$. Vorerst untersuchen wir auf Q weder Anordnung noch arithmetische Operationen, lediglich für Kapitel 7 wird davon eine Ausnahme gemacht werden. Im weiteren sollen Stern-Brocot-Brüche schlicht **Brüche** genannt werden.

Die Abbildung $D: Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$ sei durch

$$D\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right) := |ad - bc|$$

für $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in Q$ festgelegt. Für $e, f \in \{-1, 1\}$ gilt

$$D\left(\frac{ea}{ec}, \frac{fb}{fd}\right) = |eafd - fbec| = |ef||ad - bc| = |ad - bc| = D\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right),$$

also ist D unabhängig von der Wahl der Vertreter für $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$.

Zwei Brüche $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ heißen **benachbart, Stern-Brocot-Nachbarn** oder schlicht **Nachbarn**, wenn $D\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right) = 1$ ist. Es gilt

$$D\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right) = |bc - ad| = |ad - bc| = D\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right),$$

die Relation „benachbart“ ist also symmetrisch. Da stets $D\left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q}\right) = 0$ gilt, ist die Relation antireflexiv. Im allgemeinen ist Nachbarschaft nicht transitiv; so sind etwa $\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}$ und $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ jeweils benachbart, aber es gilt $D\left(\frac{-1}{1}, \frac{1}{1}\right) = 2$.

Bemerkung 2.3. Die Brüche $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ sind benachbart.

Lemma 2.4. Sind a, b, c, d ganze Zahlen mit $|ad - bc| = 1$, dann sind (a, c) und (b, d) in Q_0 .

Beweis. Sicher gilt $(a, c), (b, d) \neq (0, 0)$. Nach Lemma 2.1 sind a, c und b, d teilerfremd, also folgt die Behauptung. \square

2.2 Signatur

Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, dann gilt stets

- $|a + b| = |a| + |b|$ oder
- $|a - b| = |a| + |b|$,

je nachdem, welche Vorzeichen a und b tragen. Ist a oder b gleich Null, dann gelten sogar beide Eigenschaften.

Definition. Die Teilmengen **(SIG+)** und **(SIG-)** von

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \mid |ad - bc| = 1 \right\}$$

seien charakterisiert durch

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\text{SIG+}) : \Leftrightarrow |a + b| = |a| + |b|$ und $|c + d| = |c| + |d|$,
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\text{SIG-}) : \Leftrightarrow |a - b| = |a| + |b|$ und $|c - d| = |c| + |d|$.

Wir sagen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **erfüllt** (SIG+), wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\text{SIG+})$ gilt. Analog für (SIG-).

Die Eigenschaften (SIG+) und (SIG-) werden als **Signatur** der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bezeichnet. Es gilt (SIG+), wenn die Einträge in jeder Zeile der Matrix gleiches Vorzeichen haben (im Sinne dessen, daß Null beide Vorzeichen trägt), und (SIG-), wenn die Einträge in jeder Zeile verschiedenes Vorzeichen haben. Die folgende Proposition 2.5 sagt aus, daß die Einträge der Matrix durch $|ad - bc| = 1$ so voneinander abhängen, daß nicht in einer Zeile gleiche und in der anderen verschiedene Vorzeichen stehen können.

Proposition 2.5. Jedes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ mit $|ad - bc| = 1$ erfüllt (SIG+) oder (SIG-).

Beweis. Sicher ist mindestens eines, $|a + b| = |a| + |b|$ oder $|a - b| = |a| + |b|$, gültig. Ebenso gilt $|c + d| = |c| + |d|$ oder $|c - d| = |c| + |d|$.

Ist ein Matrixeintrag gleich Null, dann sind für seine Zeile sogar beide Bedingungen gültig.

Tragen alle Zahlen dasselbe Vorzeichen oder sind zwei positiv und zwei negativ, dann ist die Aussage ebenfalls leicht zu sehen.

Hat ein Matrixeintrag ein anderes Vorzeichen, als die übrigen, etwa $b, c, d \geq 0$, $a < 0$, dann muß wegen $|ad - bc| = 1$ einer der Einträge b, c, d gleich Null sein. \square

Proposition 2.6. Gilt für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ mit $|ad - bc| = 1$ sowohl (SIG+), als auch (SIG-), dann ist $\left\{ \frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right\} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{0} \right\}$.

Beweis. Da (SIG+) und (SIG-) erfüllt sind, gilt $|a + b| = |a| + |b| = |a - b|$ und damit $a = 0$ oder $b = 0$. Ebenso gilt $|c + d| = |c| + |d| = |c - d|$, also $c = 0$ oder $d = 0$. Wegen $|ad - bc| = 1$ gilt in beiden Fällen ausschließliches oder. Auch können nicht a und c oder b und d beide Null sein. Also ist je genau ein Element aus den Paaren a, c sowie b, d gleich Null. Das jeweils andere hat den Betrag eins. Es folgt $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{0} \right\}$. Da benachbarte Brüche nicht gleich sein können, gilt sogar $\left\{ \frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right\} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{0} \right\}$. \square

Bemerkung 2.7. Jedes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ trägt dieselbe Signatur wie $\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$.

Bemerkung 2.8. Erfüllt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ (SIG+) (beziehungsweise (SIG-)), dann gilt

- (SIG+) (beziehungsweise (SIG-)) für $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$,
- (SIG-) (beziehungsweise (SIG+)) für $\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$ und
- (SIG-) (beziehungsweise (SIG+)) für $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$.

Wir wollen die Signatur auf Paare benachbarter Brüche übertragen. Dabei stellen wir fest, daß etwa $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ verschiedene Signaturen tragen, unter $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right)$ jedoch auf dasselbe Paar benachbarter Brüche abgebildet werden. Wir können also nur von der Signatur der Repräsentanten zweier benachbarter Brüche sprechen. Unter der Kurzschreibweise „ $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ tragen die Signatur (SIG+)“ für benachbarte $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in \mathbb{Q}$ soll im Folgenden verstanden werden, daß

durch die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ Repräsentanten der Brüche festgelegt sind und diese (SIG+) erfüllt. Analog für (SIG-).

Nach Bemerkung 2.7 ist dies von der Reihenfolge der Brüche unabhängig. Die Rechenregeln aus Bemerkung 2.8 lassen sich unter dieser Konvention in der folgenden Weise schreiben:

Bemerkung 2.9. Tragen Nachbarn $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in Q$ die Signatur (SIG+), dann gilt:

- $\frac{-a}{-c}, \frac{b}{d}$ und $\frac{a}{c}, \frac{-b}{-d}$ tragen (SIG-),
- $\frac{-a}{-c}, \frac{-b}{-d}$ tragen (SIG+).

Tragen benachbarte $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in Q$ die Signatur (SIG-), dann gilt:

- $\frac{-a}{-c}, \frac{b}{d}$ und $\frac{a}{c}, \frac{-b}{-d}$ tragen (SIG+),
- $\frac{-a}{-c}, \frac{-b}{-d}$ tragen (SIG-).

Bemerkung 2.10. Stets können zu zwei benachbarten Brüchen Vertreter gewählt werden, die (SIG+) erfüllen.

2.3 Medianten und Eltern

Lemma 2.11. Seien (a, c) und (b, d) aus Q_0 , so daß $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ Nachbarn sind. Dann liegen $(a + b, c + d)$, $(a - b, c - d)$ in Q_0 und es gilt $\frac{a+b}{c+d} \neq \frac{a-b}{c-d}$.

Beweis. Es ist

$$|a(c + d) - c(a + b)| = |ac + ad - ac - bc| = |ad - bc| = D\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

und

$$|a(c - d) - c(a - b)| = |ac - ad - ac + bc| = |-ad + bc| = D\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

Mit Lemma 2.4 folgt daraus unmittelbar $(a + b, c + d), (a - b, c - d) \in Q_0$, also sind die Brüche $\frac{a+b}{c+d}$ und $\frac{a-b}{c-d}$ wohldefiniert.

Wäre nun $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$, dann gälte entweder $a + b = a - b, c + d = c - d$ und damit $(b, d) = (0, 0)$ oder es gälte $a + b = -(a - b), c + d = -(c - d)$ und damit $(a, c) = (0, 0)$. Nach Voraussetzung sind (a, c) und (b, d) aber aus Q_0 und damit beide ungleich $(0, 0)$. Also ist $\frac{a+b}{c+d} \neq \frac{a-b}{c-d}$. \square

Definition. Zu zwei benachbarten Brüchen $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ sei die Menge ihrer **Medianten** als $\left\{\frac{a+b}{c+d}, \frac{a-b}{c-d}\right\}$ definiert. Daß $\frac{a+b}{c+d}$ und $\frac{a-b}{c-d}$ zwei wohldefinierte, voneinander verschiedene Brüche sind, folgt aus Lemma 2.11. Da $\frac{a}{c}$ und $\frac{-a}{-c}$ das gleiche Element aus Q vertreten, vertauschen sich je nach Wahl der Vertreter die Rollen beider Medianten, die zweielementige Menge der Medianten zu $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ ist aber stets wohldefiniert.

Bemerkung 2.12. Die Menge der Medianten zu $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ ist $\{\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}\}$.

Lemma 2.13. Stern-Brocot-Nachbarn $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ sind beide zu beiden ihrer Medianten $\frac{a+b}{c+d}$ und $\frac{a-b}{c-d}$ benachbart.

Beweis. Es ist

$$D\left(\frac{a}{c}, \frac{a+b}{c+d}\right) = |a(c+d) - c(a+b)| = |ad - bc + ac - ac| = |ad - bc| = 1,$$

$$D\left(\frac{a+b}{c+d}, \frac{b}{d}\right) = |(a+b)d - b(c+d)| = |ad - bc + bd - bd| = |ad - bc| = 1,$$

$$D\left(\frac{a}{c}, \frac{a-b}{c-d}\right) = |a(c-d) - c(a-b)| = |-ad + bc + ac - ac| = |-ad + bc| = 1$$

und

$$D\left(\frac{a-b}{c-d}, \frac{b}{d}\right) = |(a-b)d - b(c-d)| = |ad - bc - bd + bd| = |ad - bc| = 1.$$

□

Proposition 2.14. Seien $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ Stern-Brocot-Nachbarn. Die Menge M der Brüche, die zu beiden benachbart sind, enthält genau zwei Elemente, nämlich deren Medianten.

Beweis. In Lemma 2.13 wurde bereits gezeigt, daß beide Medianten in M liegen. Sei $\frac{p}{q}$ aus M , dann gilt

$$D\left(\frac{a}{c}, \frac{p}{q}\right) = |aq - pc| = D\left(\frac{p}{q}, \frac{b}{d}\right) = |pd - bq| = 1.$$

Daher gibt es ein $e \in \{-1, 1\}$ mit $aq - pc = e(pd - bq)$ und es gilt

$$aq - pc = e(pd - bq),$$

$$aq + ebq = epd + pc,$$

$$q(a + eb) = p(c + ed).$$

Da p, q und nach Lemma 2.11 auch $a + eb, c + ed$ teilerfremd sind, ist $\frac{p}{q} = \frac{a+eb}{c+ed}$ und damit $\frac{p}{q}$ einer der Medianten von $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$. □

Definition. Die Abbildung $N_1 : Q \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei durch $N_1\left(\frac{p}{q}\right) := |p| + |q|$ erklärt.

Bemerkung 2.15. Für alle $\frac{p}{q} \in Q$ ist $N_1\left(\frac{p}{q}\right) > 0$. Ist $N_1\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, dann ist $\frac{p}{q} \in \{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\}$.

Lemma 2.16. Für Stern-Brocot-Nachbarn $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ gilt $N_1\left(\frac{a}{c}\right) = N_1\left(\frac{b}{d}\right)$ genau dann, wenn $\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\} = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\}$ ist.

Beweis. Ist $\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$, dann sind $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ benachbart und es gilt $N_1\left(\frac{a}{c}\right) = N_1\left(\frac{b}{d}\right) = 1$.

Gelte nun $N_1\left(\frac{a}{c}\right) = N_1\left(\frac{b}{d}\right)$, also $|a| + |c| = |b| + |d|$ für benachbarte $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in Q$. Sei $k := |b| - |a| = |c| - |d|$. Wäre $k = 0$, dann gälte $\frac{a}{c} = \frac{\pm b}{d}$ und damit $D\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right) \in 2\mathbb{Z}$, was der Nachbarschaft widerspräche.

Fall I. $k \geq 1$. Dann ist $|b| > |a| \geq 0$ und $|c| > |d| \geq 0$, also $|b| \geq |a| + 1$ und $|c| \geq |d| + 1$. Wäre $a \neq 0$ oder $d \neq 0$, dann wäre $|b||c| \geq (|a| + 1)(|d| + 1) = |a||d| + |a| + |d| + 1 > |a||d| + 1$. Aber aus $|a||d| - |b||c| = \pm 1$ (Lemma 2.2) folgt $|b||c| = |a||d| \mp 1$. Widerspruch. Also gilt $a = d = 0$ und damit $|b| = |c| = 1$.

Fall II. $k \leq -1$. Dann ist $|a| > |b| \geq 0$ und $|d| > |c| \geq 0$. Wegen $|a||d| = |b||c| \pm 1$ folgt analog zum ersten Fall $|a| = |d| = 1$ und $b = c = 0$.

In beiden Fällen gilt $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$. Da $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ benachbart sind, müssen sie voneinander verschieden sein. Also gilt sogar $\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$. \square

Lemma 2.17. Sind $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in Q$ benachbart mit $N_1\left(\frac{a}{c}\right) < N_1\left(\frac{b}{d}\right)$, dann ist $|a| \leq |b|$ und $|c| \leq |d|$.

Beweis. Nach Bemerkung 2.15 ist $N_1\left(\frac{a}{c}\right) \geq 1$. Da $N_1\left(\frac{b}{d}\right)$ echt größer als $N_1\left(\frac{a}{c}\right)$ ist, gilt $N_1\left(\frac{b}{d}\right) \geq 2$. Also ist $\frac{b}{d}$ weder $\frac{0}{1}$ noch $\frac{1}{0}$ und damit $b, d \neq 0$.

Es gilt $|a| + |c| < |b| + |d|$ nach Voraussetzung. Sei angenommen, daß $|a| > |b|$ wäre, dann gälte $|d| > |c| + (|a| - |b|)$, also $|d| \geq |c| + 1$. Multiplizieren beider Ungleichungen lieferte $|a||d| > |b|(|c| + 1)$, woraus $|a||d| - |b||c| > |b| \geq 1$ folgte. Wäre angenommen $|c| > |d|$, dann gälte $|b| > |a| + (|c| - |d|)$, also $|b| \geq |a| + 1$. Multiplizieren dieser Ungleichungen lieferte $(|a| + 1)|d| < |b||c|$, was $|a||d| - |b||c| < -|d| \leq -1$ bedeuten würde. Beides widerspricht $|a||d| - |b||c| = \pm 1$ (Lemma 2.2). \square

Lemma 2.18. Seien $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ benachbarte Brüche mit $N_1\left(\frac{a}{c}\right) < N_1\left(\frac{b}{d}\right)$ und (SIG+), also nach obiger Konvention Vertreter so gewählt, daß $|a + b| = |a| + |b|$ und $|c + d| = |c| + |d|$ gilt.

Dann gilt $|a - b| \leq |b|$ und $|c - d| \leq |d|$.

Beweis. Wegen Lemma 2.17 gilt $|a| \leq |b|$ und $|c| \leq |d|$. Die folgende Fallunterscheidung soll getroffen werden:

- Ist $a + b \geq 0$, dann sind wegen (SIG+) $a, b \geq 0$ und es gilt $|a - b| = b - a = |b| - |a|$.
- Ist $a + b \leq 0$, dann sind $a, b \leq 0$ und es gilt $|a - b| = a - b = -(|a| - |b|) = |b| - |a|$.
- Ist $c + d \geq 0$, dann sind $c, d \geq 0$ und es gilt $|c - d| = d - c = |d| - |c|$.
- Ist $c + d \leq 0$, dann sind $c, d \leq 0$ und es gilt $|c - d| = c - d = -(|c| - |d|) = |d| - |c|$.

In jedem Fall gilt $|a - b| = |b| - |a| \leq |b|$ und $|c - d| = |d| - |c| \leq |d|$. \square

Lemma 2.19. Sei $(p, q) \in Q_0$ mit $p, q > 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit:

- $a, b, c, d \geq 0$,
- $ad - bc = 1$ sowie
- $p = a + b$ und $q = c + d$.

Für diese gilt dann $(a, c), (b, d) \in Q_0$ und $a + c, b + d < p + q$.

Beweis. Zuerst werde die Existenz dieser Zahlen gezeigt. Da p und q teilerfremd sind, gibt es nach Lemma 2.1 ganze Zahlen m, n mit $mq - pn = 1$. Auch q und n sind damit teilerfremd. Jedes Zahlentupel $(m + zp, n + zq)$, $z \in \mathbb{Z}$, ist wegen $(m + zp)q - (n + zq)p = mq + zpq - np - zpq = mq - np = 1$ eine Lösung dieser Gleichung.

Da q, n teilerfremd sind, gibt es ein $z_0 \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq n + z_0q < q$. Sei $a := m + z_0p$ und $c := n + z_0q$. Dann gilt $aq - pc = 1$ und $0 \leq c < q$. Es sind $p, c \geq 0$, also ist $aq = 1 + pc \geq 1$ und damit $a > 0$. Weiter ist $pq > pc = aq - 1$, also gilt $0 < a \leq p$.

Seien $b := p - a$ und $d := q - c$. Dann gilt:

- $a + b = a + p - a = p$,
- $c + d = c + q - c = q$,
- $a, b, c, d \geq 0$, wegen $0 < a < p, 0 \leq c < q$, sowie
- $ad - bc = a(q - c) - (p - a)c = aq - ac - pc + ac = aq - pc = 1$.

Aus $ad - bc = 1$ folgt mit Lemma 2.4 $(a, c), (b, d) \in Q_0$. Es gilt $a + b + c + d = p + q$. Alle diese Zahlen sind größer oder gleich Null. Wegen $(a, c), (b, d) \neq (0, 0)$ sind $a + c, b + d > 0$, also gilt $a + c, b + d < p + q$.

Nun soll die Eindeutigkeit von a, b, c, d gezeigt werden. Seien dazu $a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$ mit $a', b', c', d' \geq 0$, $a'd' - b'c' = 1$ und $p = a' + b', q = c' + d'$ beliebig. Nach Lemma 2.4 liegen (a', c') und (b', d') ebenfalls in Q_0 .

Sei $k := c' - c$ und $l := a' - a$. Dann ist $c' = c + k$ und $a' = a + l$. Wegen $a + b = p = a' + b'$ ist $b' = a + b - a' = b - l$, wegen $c + d = q = c' + d'$ ist $d' = c + d - c' = d - k$. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &= a'd' - b'c' = (a + l)(d - k) - (b - l)(c + k) \\ &= ad + ld - ak - lk - bc + lc - bk + lk \\ &= (ad - bc) + l(c + d) - k(a + b) \\ &= 1 + l(c + d) - k(a + b), \end{aligned}$$

also ist $lq - kp = 0$ und damit $kp = lq$. Da p, q teilerfremd sowie beide ungleich Null sind, ist $k = xq$ und $l = xp$ für ein geeignetes $x \in \mathbb{Z}$.

Fall I. $x = 0$. Dann ist $(a', c') = (a, c)$, $(b', d') = (b, d)$.

Fall II. $x \geq 1$. Es ist $b' = b - l = b - xp$ und $d' = d - k = d - xq$. Aus $b \leq p$, $d \leq q$ folgt $b', d' \leq 0$. Mit $b', d' \geq 0$ folgt $(b', d') = (0, 0) \notin Q_0$. Widerspruch.

Fall III. $x \leq -1$. Es ist $a' = a + l = a + xp$ und $c' = c + k = c + xq$. Aus $a \leq p$, $c \leq q$ folgt $a', c' \leq 0$. Mit $a', c' \geq 0$ folgt $(a', c') = (0, 0) \notin Q_0$. Widerspruch. \square

Dieses wichtige Lemma kann auch geometrisch bewiesen werden:

Beweis. Es werde das Gitter $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ der ganzen Zahlen in der Ebene betrachtet. Zuerst werde folgende Beobachtung gemacht:

Proposition 2.20. Ein Tupel $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, ist genau dann teilerfremd, wenn die Strecke $(0, 0)(x, y)$ keinen weiteren Punkt aus \mathbb{Z}^2 enthält. Vergleiche Abbildung A.

Beweis. [Cas88, S. 155]. \square

Sei $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq y \leq q, 0 \leq x \leq p \right\}$. Anschaulich betrachtet ist R die Menge an Gitterpunkten, die in dem von $(0, 0)$, $(p, 0)$, (p, q) und $(0, q)$ eingeschriebenen Rechteck liegen. Die Punkte (a, c) , (b, d) müssen – so sie existieren – in R liegen, um $p = a + b$ und $q = c + d$ zu erfüllen. Wegen $p, q > 0$ enthält R mit $(1, 0)$ mindestens einen Punkt ungleich $(0, 0)$ und (p, q) .

Sei s die Strecke $(0, 0)(p, q)$ und sei s' die Gerade, die s enthält. Sei weiter $(a, c) \in R \setminus \{(0, 0), (p, q)\}$ ein Punkt mit minimalem euklidischen Abstand h zu s' . Außer $z(p, q)$, $z \in \mathbb{Z}$, liegt nach Proposition 2.20 kein Gitterpunkt in s' . Dieses ist nur für $z \in \{0, 1\}$ in R enthalten. Da (a, c) also nicht auf s' liegt, ist $h > 0$. Vergleiche Abbildung B.

Das Dreieck $\Delta = (0, 0)(a, c)(p, q)$ ist demnach nicht entartet. Kein Gitterpunkt kann im Inneren dieses Dreiecks liegen, da er geringeren euklidischen Abstand zu s' als (a, c) hätte, was dessen Wahl widerspräche. Aus demselben Grund kann kein Gitterpunkt außer den Ecken (a, c) , $(0, 0)$ und (p, q) auf einer der Seiten liegen.

Da kein Punkt aus \mathbb{Z}^2 auf der Strecke $(0, 0)(a, c)$ liegt, folgt mit Proposition 2.20, daß a und c teilerfremd sind. Da auch kein Punkt aus dem Gitter auf der Strecke $(a, c)(p, q)$ liegt, sind $b := p - a$ und $d := q - c$ teilerfremd. Der Punkt (b, d) liegt in R , da $0 \leq a \leq p$ und $0 \leq c \leq q$ gilt. Also ist $a, b, c, d \geq 0$, $p = a + b$, $q = c + d$ und die Tupel (a, c) , (b, d) sind teilerfremd.

Das Parallelogramm $P = (0, 0)(a, c)(p, q)(b, d)$ ist punktsymmetrisch um seinen Mittelpunkt $(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q)$. Die Punktspiegelung von Δ um diesen Mittelpunkt ergibt das kongruente Dreieck $(0, 0)(b, d)(p, q)$. Das Innere dieses Dreiecks enthält ebenfalls keinen Gitterpunkt, da ein solcher unter derselben Punktspiegelung auf einen

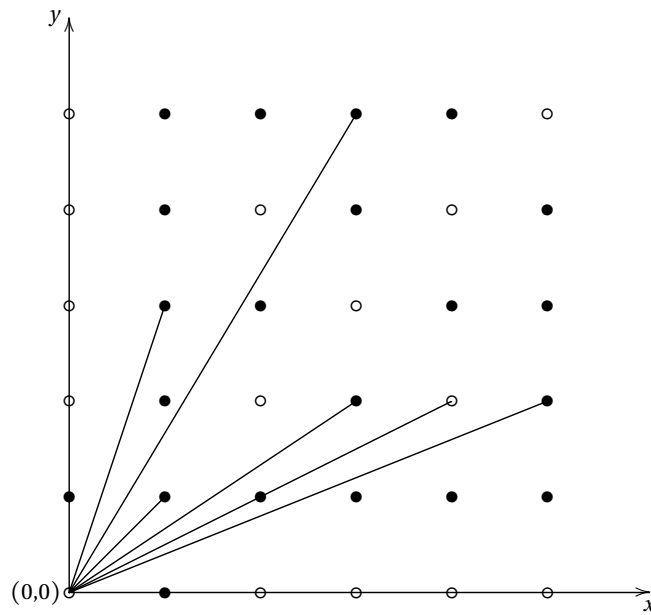


Abbildung A: Teilerfremdheit geometrisch interpretiert. Teilerfremde Paare sind mit •, nicht-teilerfremde mit ◦ gekennzeichnet.

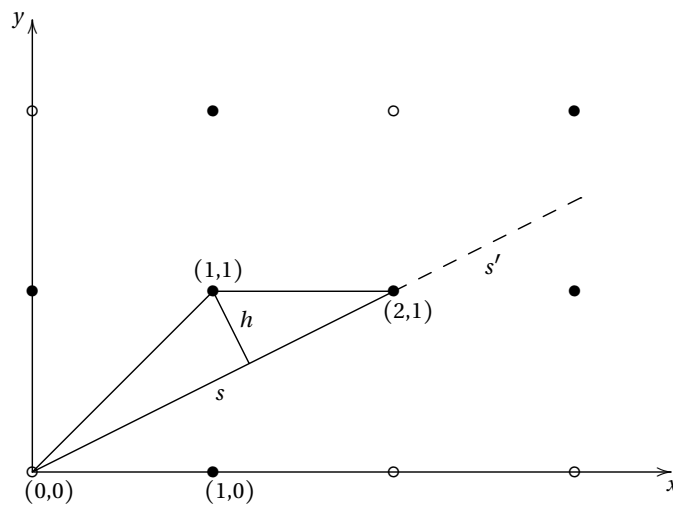


Abbildung B: Ein Beispiel für $(p, q) = (2, 1)$. Von den zwei Punkten mit Abstand h von s wurde $(1, 1)$ als (a, c) gewählt.

Gitterpunkt im Inneren von Δ abgebildet würde. Da die Strecke $(0, 0)(p, q)$ außer $(0, 0)$ und (p, q) keine Gitterpunkte enthält, liegen im Inneren von P also keine Gitterpunkte. Gitterpunkte auf dem Rand von P sind lediglich die vier Eckpunkte.

Die Fläche von P ist $|ad - bc|$. Sie ist ungleich Null, da Δ nicht entartet ist. Wäre gezeigt, daß diese Fläche gleich eins ist, dann wäre diese Schlussrichtung bewiesen, denn durch Vertauschen von (a, c) und (b, d) könnte $ad - bc = 1$ erre-

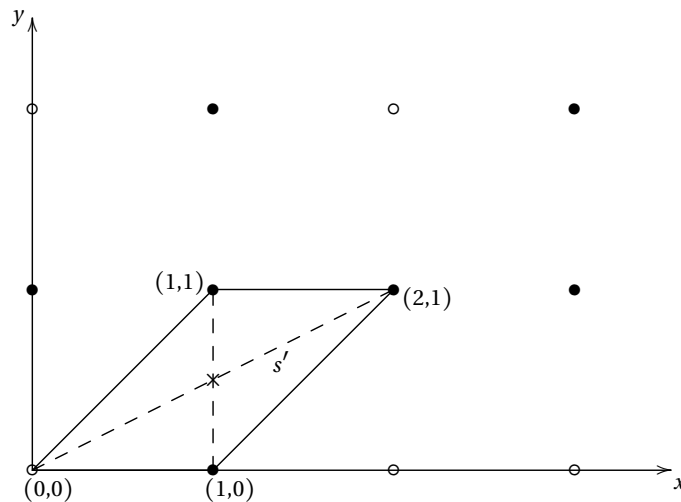


Abbildung C: Das Parallelogramm $P = (0,0)(a,c)(p,q)(b,d)$ für das obige Beispiel.

icht werden, ohne die anderen Bedingungen zu verletzen womit a, b, c, d alle geforderten Eigenschaften besitzen würden.

Hierzu wird der Minkowskische Gitterpunktsatz in der folgenden Formulierung verwendet:

Satz 2.21. Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein Gitter. Eine beschränkte, konvexe und um Null punktsymmetrische Teilmenge des \mathbb{R}^n , deren Volumen größer dem 2^n -fachen des Volumens einer Grundmasche im Gitter Λ ist, enthält in ihrem Inneren neben dem Ursprung noch mindestens zwei weitere Punkte des Gitters Λ .

Beweis. [Min10, Kap. 3]. □

Auf den Fall des Gitters $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ angewendet bedeutet dies, daß jede beschränkte, konvexe und um Null punktsymmetrische Teilmenge des \mathbb{R}^2 mit Flächeninhalt größer 4 in ihrem Inneren neben $(0,0)$ mindestens zwei weitere Gitterpunkte enthält.

Sei $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ ein Vektor mit ganzzahligen Koeffizienten und $P + (u, v)$ das um diesen Vektor verschobene Parallelogramm. Dieses hat im Inneren keinen Gitterpunkt und auf dem Rand lediglich die verschobenen Eckpunkte von P als Gitterpunkte.

Sei $Q := P \cup P - (a, c) \cup P - (b, d) \cup P - (p, q)$, also die Vereinigung von P mit drei verschobenen Kopien davon, dann ist Q das Parallelogramm

$$(p, q)(a - b, c - d)(-p, -q)(b - a, d - c).$$

Es hat den vierfachen Flächeninhalt von P . Alle Gitterpunkte, die im Inneren oder auf dem Rand von Q liegen können, sind die verschobenen Eckpunkte von P ,

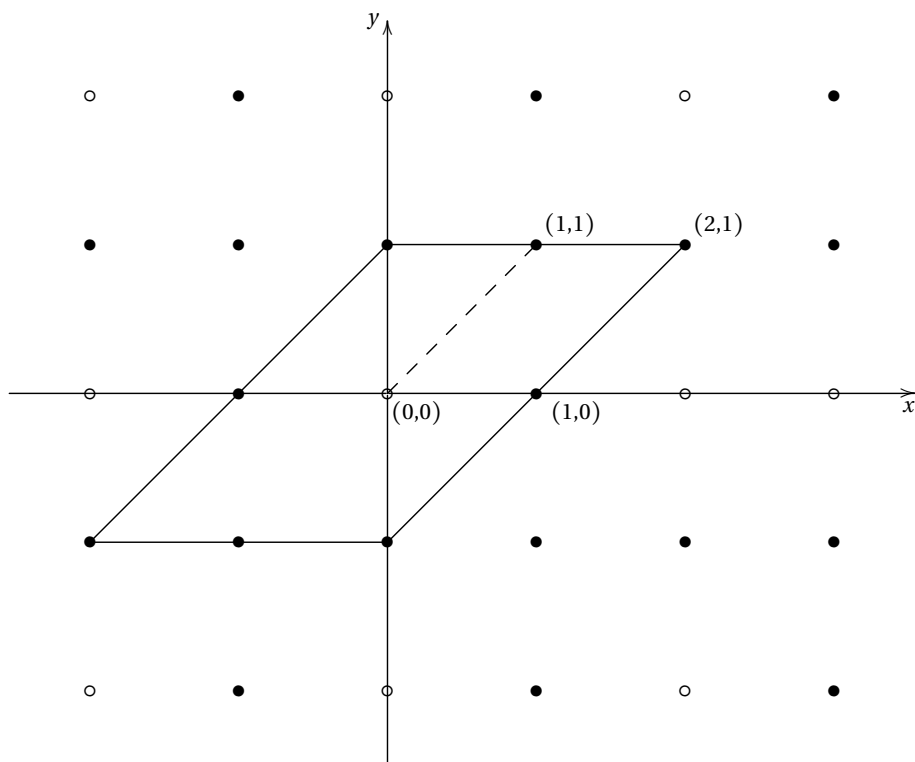


Abbildung D: Das Parallelogramm Q für das obige Beispiel.

neben den Eckpunkten von Q also (a, c) , (b, d) , $(-a, -c)$, $(-b, -d)$ und $(0, 0)$. Bis auf den Ursprung sind dies die seitenhalbierenden Punkte der Seiten von Q und damit im Rand von Q enthalten. Also liegt außer dem Ursprung kein Gitterpunkt im Inneren von Q . Als Parallelogramm ist Q konvex und nach Konstruktion um den Ursprung punktsymmetrisch. Nach dem Gitterpunktsatz hat Q also einen Flächeninhalt kleiner oder gleich 4. Es folgt, daß die Fläche $|ad - bc|$ von P kleiner oder gleich 1 und als ganze Zahl damit gleich 1 ist.

Nun werde die umgekehrte Schlussrichtung gezeigt: Sind a', b', c', d' mit $a'd' - b'c' = 1$ und $p = a' + b'$, $q = c' + d'$ gegeben, dann hat das von ihnen aufgespannte Parallelogramm $P' := (0, 0)(a', c')(p, q)(b', d')$ den Flächeninhalt $a'd' - b'c'$, also eins. Da die Diagonale $(0, 0)(p, q)$ von P' gleich der solchen in P ist, muß die Höhe von (a', c') über dieser Diagonale gleich dem oben berechneten h sein. Ein Punkt in R mit Abstand h von s' liegt auf einer der Parallelen zu s' , die durch (a, c) und (b, d) verlaufen, ist also von der Form $(a, c) + t(p, q)$ oder $(b, d) + t(p, q)$ mit geeignetem $t \in \mathbb{R}$. Genauer muß wegen Proposition 2.20 sogar $t \in \mathbb{Z}$ sein, da in $s(]0, 1[)$ keine Gitterpunkte liegen können. Für $t \neq 0$ liegen diese Punkte jedoch nicht mehr in R , also ist $(a', c') = (a, c)$ wie behauptet oder $(a', c') = (b, d)$, woraus jedoch $a'd' - b'c' = bc - ad = -1$ folgen würde.

Somit sind die bereits konstruierten Punkte (a, c) und (b, d) die einzigen mit den

gesuchten Eigenschaften. □

Proposition 2.22. Sei $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes ungeordnetes Paar benachbarter Brüche $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ mit $N_1(\frac{a}{c}), N_1(\frac{b}{d}) < N_1(\frac{p}{q})$, so daß $\frac{p}{q}$ einer der Medianten von $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ ist. Diese Brüche $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ heißen die **Stern-Brocot-Eltern** oder schlicht **Eltern** von $\frac{p}{q}$.

Beweis. Zuerst werde die Existenz gezeigt. Da $\frac{p}{q}$ weder $\frac{0}{1}$ noch $\frac{1}{0}$ ist, sind $p, q \neq 0$. Sei $p' := |p|, q' := |q|$ und seien $e := \text{sgn}(p), f := \text{sgn}(q)$ die Vorzeichen von p und q , also -1 oder 1 .

Nach Lemma 2.19 existieren eindeutig bestimmte $(a', c'), (b', d') \in \mathbb{Q}_0$ mit

- $a', b', c', d' \geq 0, a'd' - b'c' = 1,$
- $p' = a' + b', q' = c' + d',$
- $a' + c', b' + d' < p' + q'.$

Seien $a := ea', b := eb', c := fc', d := fd'.$

Dann sind $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ wegen $ad - bc = ef = \pm 1$ benachbart. Es ist $\frac{p}{q} = \frac{ep'}{fq'} = \frac{e(a'+b')}{f(c'+d')} = \frac{a+b}{c+d}$, also ist $\frac{p}{q}$ einer der Medianten von $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$. Weiter gilt

$$N_1\left(\frac{a}{c}\right) = |a| + |c| = a' + c' < p' + q' = |p| + |q| = N_1\left(\frac{p}{q}\right)$$

und analog $N_1\left(\frac{b}{d}\right) < N_1\left(\frac{p}{q}\right).$

Seien nun umgekehrt $\frac{\bar{a}}{\bar{c}}$ und $\frac{\bar{b}}{\bar{d}}$ Nachbarn mit $N_1\left(\frac{\bar{a}}{\bar{c}}\right), N_1\left(\frac{\bar{b}}{\bar{d}}\right) < N_1\left(\frac{p}{q}\right)$ von denen $\frac{p}{q}$ ein Mediant ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können Vertreter so gewählt werden, daß $\frac{p}{q} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{\bar{c} + \bar{d}}$ gilt.

Nach Lemma 2.13 sind $\frac{\bar{a}}{\bar{c}}$ und $\frac{\bar{b}}{\bar{d}}$ zu $\frac{p}{q}$ benachbart. Aus $N_1\left(\frac{\bar{a}}{\bar{c}}\right), N_1\left(\frac{\bar{b}}{\bar{d}}\right) < N_1\left(\frac{p}{q}\right)$ folgt nach Lemma 2.17, daß $|\bar{a}|, |\bar{b}| \leq |p|$ und $|\bar{c}|, |\bar{d}| \leq |q|$ gilt. Es folgt $|\bar{a}| + |\bar{b}| = |p| = |\bar{a} + \bar{b}|$ und $|\bar{c}| + |\bar{d}| = |q| = |\bar{c} + \bar{d}|$, also gilt für $\frac{\bar{a}}{\bar{c}}$ und $\frac{\bar{b}}{\bar{d}}$ (SIG+). Nach einem analogen Argument tragen auch $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ (SIG+).

Da $\frac{\bar{a}}{\bar{c}}$ und $\frac{\bar{b}}{\bar{d}}$ benachbart sind, gilt mit Lemma 2.2 $|\bar{a}||\bar{d}| - |\bar{b}||\bar{c}| = \pm 1$. Durch Umbenennen kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $|\bar{a}||\bar{d}| - |\bar{b}||\bar{c}| = 1$ erreicht werden. Dies lässt nach Bemerkung 2.7 die Signatur von $\frac{\bar{a}}{\bar{c}}$ und $\frac{\bar{b}}{\bar{d}}$ unverändert.

Insgesamt gilt $|\bar{a}|, |\bar{b}|, |\bar{c}|, |\bar{d}| \geq 0, |\bar{a}||\bar{d}| - |\bar{b}||\bar{c}| = 1$ sowie $|p| = |\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$ und $|q| = |\bar{c} + \bar{d}| = |\bar{c}| + |\bar{d}|$. Nach Lemma 2.19 sind die Tupel $(|\bar{a}|, |\bar{c}|)$ und $(|\bar{b}|, |\bar{d}|)$ mit diesen Eigenschaften zu $(|p|, |q|)$ eindeutig bestimmt. Also gilt $(|\bar{a}|, |\bar{c}|) = (a', c')$ und $(|\bar{b}|, |\bar{d}|) = (b', d').$

Wegen $\frac{a+b}{c+d} = \frac{p}{q} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{\bar{c}+\bar{d}}$ gibt es ein $v \in \{-1, 1\}$, so daß $a + b = v(\bar{a} + \bar{b})$ und $c + d = v(\bar{c} + \bar{d})$ gilt.

Da $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ (SIG+) erfüllen, tragen a und b dasselbe Vorzeichen; ebenso $v\bar{a}$ und $v\bar{b}$. Es gilt $a + b = v\bar{a} + v\bar{b}$ sowie $|a| = |\bar{a}|, |b| = |\bar{b}|$, also muß $a = v\bar{a}$ und $b = v\bar{b}$ sein. Analog gilt $c = v\bar{c}$ und $d = v\bar{d}$. Damit folgt $\frac{a}{c} = \frac{\bar{a}}{\bar{c}}$ und $\frac{b}{d} = \frac{\bar{b}}{\bar{d}}$. \square

Lemma 2.23. Sei $\frac{p}{q} \in Q$ nicht $\frac{0}{1}$ oder $\frac{1}{0}$. Ist $\frac{a}{c}$ ein zu $\frac{p}{q}$ benachbarter Bruch mit $N_1\left(\frac{a}{c}\right) \leq N_1\left(\frac{p}{q}\right)$, dann ist $\frac{a}{c}$ eines der Eltern von $\frac{p}{q}$.

Beweis. Nach Lemma 2.16 gilt wegen $\frac{p}{q} \notin \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$ sogar $N_1\left(\frac{a}{c}\right) < N_1\left(\frac{p}{q}\right)$. Aus Lemma 2.17 folgt dann $|a| \leq |p|, |c| \leq |q|$. Sei ein Vertreter von $\frac{a}{c}$ so gewählt, daß $|a+p| = |a| + |p|, |c+q| = |c| + |q|$, also (SIG+) für $\frac{a}{c}, \frac{p}{q}$, gilt (Bemerkung 2.10).

Sei $\frac{b}{d}$ der Mediant von $\frac{a}{c}, \frac{p}{q}$, der durch $b := p - a, d := q - c$ gegeben ist. Als Mediant ist $\frac{b}{d}$ zu $\frac{a}{c}$ benachbart (Lemma 2.13). Nach Lemma 2.18 gilt $|a-p| \leq |p|$ und $|q-c| \leq |q|$, also ist $|b| + |d| \leq |p| + |q|$. Mit Lemma 2.16 folgt sogar $|b| + |d| < |p| + |q|$. Es ist $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a+p-a}{c+q-c} = \frac{p}{q}$ und $|a| + |c| < |p| + |q|$ nach Voraussetzung. Also sind $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ die nach Proposition 2.22 eindeutig bestimmten Stern-Brocot-Eltern von $\frac{p}{q}$. \square

Sei $M_0 := \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$. Sei induktiv zu einem $M_k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, die Menge M_{k+1} als

$$M_{k+1} := M_k \cup \left\{ \frac{a+b}{c+d}, \frac{a-b}{c-d} \mid \frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in M_k, D\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right) = 1 \right\}$$

definiert und sei $M := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$.

Proposition 2.24. Es ist $M = Q$, das heißt zu jedem Bruch $\frac{p}{q}$ gibt es ein $k \geq 0$, so daß $\frac{p}{q}$ in M_k ist.

Beweis. Sei $\frac{p}{q} \in Q$ beliebig. Ist $\frac{p}{q} = \frac{0}{1}$ oder $\frac{p}{q} = \frac{1}{0}$, dann ist $\frac{p}{q}$ nach Definition in M_0 . Ist $\frac{p}{q}$ keiner dieser Brüche, dann gibt es nach Proposition 2.22 ein benachbartes Paar $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ mit $N_1\left(\frac{a}{c}\right), N_1\left(\frac{b}{d}\right) < N_1\left(\frac{p}{q}\right)$, in deren Mediantenmenge $\frac{p}{q}$ liegt. Also ist $\frac{p}{q}$ bereits in M , wenn alle Brüche mit kleinerem N_1 -Wert in M sind. Da $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$, die einzigen Brüche mit N_1 -Wert 1, in M liegen, ist nach Induktion über die N_1 -Werte auch $\frac{p}{q}$ in M . \square

Lemma 2.25. Seien $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ benachbart mit (SIG+) und $N_1\left(\frac{a}{c}\right) < N_1\left(\frac{b}{d}\right)$. Dann gilt:

- $\frac{a-b}{c-d}$ ist eines der Eltern von $\frac{b}{d}$ und
- $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ sind die Eltern von $\frac{a+b}{c+d}$.

Beweis. Aus Lemma 2.18 folgt $|a - b| \leq |b|$ und $|c - d| \leq |d|$, also $N_1\left(\frac{a-b}{c-d}\right) \leq N_1\left(\frac{b}{d}\right)$. Nach Lemma 2.23 ist dann $\frac{a-b}{c-d}$ eines der Eltern von $\frac{b}{d}$.

Wegen (SIG+) gilt weiter $|a|, |b| \leq |a| + |b| = |a + b|$ und $|c|, |d| \leq |c| + |d| = |c + d|$, also $N_1\left(\frac{a}{c}\right), N_1\left(\frac{b}{d}\right) \leq N_1\left(\frac{a+b}{c+d}\right)$. Nach Lemma 2.23 sind $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ Eltern von $\frac{a+b}{c+d}$. Da $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ benachbart sind, gilt $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$, also sind sie die eindeutig bestimmten Eltern aus Proposition 2.22. \square

Proposition 2.26. Sei $k \geq 0$. Die Eltern jedes $\frac{p}{q}$ aus $M_{k+1} \setminus M_k$ liegen in M_k .

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über k . Ist $k = 0$, dann ist $\frac{p}{q}$ entweder $\frac{-1}{1}$ oder $\frac{1}{1}$. Die Stern-Brocot-Eltern dieser Brüche sind $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ welche beide in M_0 liegen.

Sei $k > 0$ und die Aussage für alle kleineren k bereits bewiesen. Zu $\frac{p}{q}$ aus $M_{k+1} \setminus M_k$ gibt es nach Konstruktion von M_{k+1} Nachbarn $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ aus M_k deren Mediant $\frac{p}{q}$ ist.

Da $k > 0$ ist, darf $\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$ ausgeschlossen werden. Nach Lemma 2.16 ist dann $N_1\left(\frac{a}{c}\right) \neq N_1\left(\frac{b}{d}\right)$. Durch Umbenennen gelte ohne Einschränkung der Allgemeinheit $N_1\left(\frac{a}{c}\right) < N_1\left(\frac{b}{d}\right)$. Durch geeignete Wahl der Vertreter gelte (SIG+) für $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ (Bemerkung 2.10).

Da $\frac{p}{q}$ sowohl zu $\frac{a}{c}$, als auch zu $\frac{b}{d}$ benachbart ist, folgt aus Proposition 2.14, daß $\frac{p}{q}$ einer der Medianten dieser Brüche ist. Nach Lemma 2.25 ist $\frac{a-b}{c-d}$ eines der Stern-Brocot-Eltern von $\frac{b}{d}$ und als solches nach Induktionsvoraussetzung schon in M_{k-1} enthalten. Also ist $\frac{p}{q} = \frac{a+b}{c+d}$. Ebenfalls nach Lemma 2.25 sind die Brüche $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ die Stern-Brocot-Eltern von $\frac{a+b}{c+d}$, welche damit in M_k liegen. \square

Proposition 2.27. Liegt $\frac{p}{q}$ in M_k für ein $k \geq 0$, dann sind auch $\frac{q}{p}, \frac{-p}{q}$ und $\frac{-q}{p}$ in M_k enthalten.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über k . In M_0 liegen $\frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ und $\frac{0}{1} = \frac{-0}{1}$. Die Aussage gilt also für $k = 0$.

Gelte die Aussage bereits für ein $k \geq 0$. Ist $\frac{p}{q}$ in $M_{k+1} \setminus M_k$, dann sind die Eltern $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ wegen Proposition 2.26 in M_k enthalten. Nach Induktionsvoraussetzung liegen $\frac{c}{a}, \frac{d}{b}; \frac{-a}{c}, \frac{-b}{d}$ und $\frac{-c}{a}, \frac{-d}{b}$ ebenfalls in M_k . Dann sind $\frac{q}{p}, \frac{-p}{q}$ und $\frac{-q}{p}$ geeignete Medianten dieser Brüche. Die Aussage gilt folglich für $k + 1$. \square

Definition. Die Abbildung $N_L: Q \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei definiert durch

$$N_L\left(\frac{p}{q}\right) = \min\left\{k \geq 0 \mid \frac{p}{q} \in M_k\right\}.$$

Nach Proposition 2.24 ist dieser N_L -Wert für jeden Bruch $\frac{p}{q}$ erklärt.

Bemerkung 2.28. Für alle $\frac{p}{q} \in Q$ gilt

$$N_L\left(\frac{p}{q}\right) = N_L\left(\frac{q}{p}\right) = N_L\left(\frac{-p}{q}\right) = N_L\left(\frac{-q}{p}\right).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Proposition 2.27. \square

Einschub: Ein Algorithmus um $N_L\left(\frac{p}{q}\right)$ zu $\frac{p}{q} \in Q$ zu berechnen ist, mit dem Intervall $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ zu beginnen und dieses durch Mediantenentnahme sukzessive zu verkleinern, bis $\frac{p}{q}$ eine der Intervallgrenzen ist [GKP89, Sect. 4.5, Erster Algorithmus]. Die Anzahl der Schritte dieses Verfahrens liefert $N_L\left(\frac{p}{q}\right)$. Hierfür wird die Anordnung von $Q \setminus \left\{\frac{1}{0}\right\}$ als \mathbb{Q} benötigt, insbesondere daß ein Mediant zwischen seinen Eltern liegt. Ein eleganteres und effizienteres Verfahren wird in Kapitel 3.6 vorgestellt werden.

Proposition 2.29. Sei $\frac{p}{q} \in Q$ nicht $\frac{0}{1}$ oder $\frac{1}{0}$. Seien $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ die Eltern von $\frac{p}{q}$. Dann gilt:

$$N_L\left(\frac{p}{q}\right) = \max\left\{N_L\left(\frac{a}{c}\right), N_L\left(\frac{b}{d}\right)\right\} + 1.$$

Beweis. Sei $l := N_L\left(\frac{p}{q}\right)$ und sei $k := \max\left\{N_L\left(\frac{a}{c}\right), N_L\left(\frac{b}{d}\right)\right\}$ das kleinste k , so daß $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ in M_k sind. Nach Definition ist $\frac{p}{q}$ einer der Medianten von $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$. Also ist $\frac{p}{q}$ in M_{k+1} enthalten und es gilt $l \leq k+1$. Da l die kleinste ganze Zahl ist, für die $\frac{p}{q}$ in M_l liegt, gilt $\frac{p}{q} \in M_l \setminus M_{l-1}$. Nach Proposition 2.26 liegen die Eltern von $\frac{p}{q}$ in M_{l-1} , also ist $k \leq l-1$. Es folgt $l \leq k+1$ und $l \geq k+1$, also $l = k+1$ und damit die Aussage. \square

Lemma 2.30. Sind $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ Nachbarn mit $N_L\left(\frac{a}{c}\right) < N_L\left(\frac{b}{d}\right)$, dann ist $N_1\left(\frac{a}{c}\right) < N_1\left(\frac{b}{d}\right)$.

Beweis. Es kann nicht $N_1\left(\frac{a}{c}\right) = N_1\left(\frac{b}{d}\right)$ gelten, denn sonst wäre $\left\{\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$ nach Lemma 2.16 und damit $N_L\left(\frac{a}{c}\right) = N_L\left(\frac{b}{d}\right) = 0$.

Sei angenommen $N_1\left(\frac{a}{c}\right) > N_1\left(\frac{b}{d}\right)$, dann wäre nach Lemma 2.23 $\frac{b}{d}$ eines der Eltern von $\frac{a}{c}$. Aus Proposition 2.29 folgte dann $N_L\left(\frac{a}{c}\right) > N_L\left(\frac{b}{d}\right)$. Widerspruch. \square

Lemma 2.31. Für Nachbarn $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ gilt $N_L\left(\frac{a}{c}\right) = N_L\left(\frac{b}{d}\right)$ genau dann, wenn $\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$ ist.

Beweis. Gilt $\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$, dann ist $N_L\left(\frac{a}{c}\right) = N_L\left(\frac{b}{d}\right) = 0$.

Seien nun $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ Nachbarn mit $N_L\left(\frac{a}{c}\right) = N_L\left(\frac{b}{d}\right)$. Gälte $N_1\left(\frac{a}{c}\right) < N_1\left(\frac{b}{d}\right)$, dann wäre nach Lemma 2.23 $\frac{a}{c}$ eines der Eltern von $\frac{b}{d}$ und es gälte $N_L\left(\frac{a}{c}\right) < N_L\left(\frac{b}{d}\right)$ wegen Proposition 2.29. Gälte $N_1\left(\frac{b}{d}\right) < N_1\left(\frac{a}{c}\right)$, dann folgte analog $N_L\left(\frac{b}{d}\right) < N_L\left(\frac{a}{c}\right)$. Beides widerspräche $N_L\left(\frac{a}{c}\right) = N_L\left(\frac{b}{d}\right)$.

Also gilt $N_1\left(\frac{a}{c}\right) = N_1\left(\frac{b}{d}\right)$ und damit $\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right\}$ nach Lemma 2.16. \square

Proposition 2.32. Sei $\frac{p}{q} \in Q$ nicht $\frac{0}{1}$ oder $\frac{1}{0}$. Ist $\frac{a}{c}$ zu $\frac{p}{q}$ benachbart und gilt $N_L\left(\frac{a}{c}\right) \leq N_L\left(\frac{p}{q}\right)$, dann ist $\frac{a}{c}$ eines der Eltern von $\frac{p}{q}$.

Beweis. Nach Lemma 2.31 ist $N_L\left(\frac{a}{c}\right) \neq N_L\left(\frac{p}{q}\right)$, also gilt $N_L\left(\frac{a}{c}\right) < N_L\left(\frac{p}{q}\right)$. Aus Lemma 2.30 folgt $N_1\left(\frac{a}{c}\right) < N_1\left(\frac{p}{q}\right)$ und damit nach Lemma 2.23, daß $\frac{a}{c}$ eines der Eltern von $\frac{p}{q}$ ist. \square

2.4 Die Modulgruppe

Lemma 2.33. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ein Element der Modulgruppe (zu Definition und Notation siehe Seite 3) und $\frac{p}{q} \in Q$. Dann ist $A\frac{p}{q} := \frac{ap+bq}{cp+dq}$ ein wohldefinierter Stern-Brocot-Bruch.

Beweis. Vertreter von A sind von der Form $\begin{pmatrix} ea & eb \\ ec & ed \end{pmatrix}$ mit $e \in \{-1, 1\}$. Vertreter von $\frac{p}{q}$ sind von der Form (fp, fq) mit $f \in \{-1, 1\}$. Für diese gilt

$$\frac{eafp + ebfq}{ecfp + edfq} = \frac{ef(ap + bq)}{ef(cp + dq)} = \frac{ap + bq}{cp + dq},$$

das Produkt ist also unabhängig von der Wahl der Vertreter. Es bleibt zu zeigen, daß $ap + bq$ und $cp + dq$ teilerfremd und nicht beide Null sind. Wegen $(p, q) \in Q_0$ gibt es nach Lemma 2.1 ganze Zahlen m, n mit $pm - qn = 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & (ap + bq)(cn + dm) - (cp + dq)(an + bm) \\ &= apcn + bqcn + bqdm + apdm - cpan - dqan - cpbm - dqbm \\ &= bqcn + apdm - dqan - cpbm \\ &= qn(bc - ad) + pm(ad - bc) \\ &= pm - qn \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.4 liegt $(ap + bq, cp + dq)$ dann in Q_0 . □

Proposition 2.34. Die Modulgruppe operiert auf Q durch die in Lemma 2.33 definierte Linksmultiplikation.

Beweis. Die Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ operiert durch Matrixmultiplikation auf Q_0 , indem Elemente aus Q_0 als Spaltenvektoren aufgefasst werden. Unter den kanonischen Abbildungen auf Γ und Q übertragen, wird diese Operation gerade zu der in Lemma 2.33 beschriebenen. In der Form eines kommutativen Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} SL_2(\mathbb{Z}) \times Q_0 & \xrightarrow{\text{Operation}} & Q_0 \\ \downarrow \text{can} \times \text{can} & & \downarrow \text{can} \\ \Gamma \times Q & \xrightarrow{\text{Operation aus Lemma 2.33}} & Q \end{array}$$

□

Wird der Bruch $\frac{ap+bq}{cp+dq}$ formal um q gekürzt, dann ergibt sich mit

$$A\frac{p}{q} = \frac{a\frac{p}{q} + b}{c\frac{p}{q} + d}$$

die klassische Schreibweise der zugrundeliegenden Möbiustransformation.

3 Die Modulgruppe und die Wortlängenmetrik

3.1 Der Graph G

Zur Konstruktion des Graphen G werde erneut Satz 1.2 verwendet. Sei $V(G) := Q$ und $E_+(G) := \Gamma$. Zu $A \in E_+(G)$ seien die Abbildungen o und t definiert, indem ein Vertreter $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ von A gewählt und

$$o(A) := \frac{a}{c}, \quad t(A) := \frac{b}{d}$$

festgelegt wird. Aus

$$ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$$

folgt mit Lemma 2.4, daß (a, c) und (b, d) in Q_0 liegen. Weiter sind die zwei Vertreter von A

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}.$$

Da $\frac{a}{c} = \frac{-a}{-c}$ und $\frac{b}{d} = \frac{-b}{-d}$ gilt, sind o und t also von der Wahl des Vertreters unabhängig.

Proposition 3.1. *Sei*

$$N := \left\{ \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right) \in Q \times Q \mid \frac{a}{c}, \frac{b}{d} \text{ sind Stern-Brocot-Nachbarn} \right\}$$

und sei $\Psi : \Gamma \rightarrow N$ durch $\Psi(A) = (o(A), t(A))$ gegeben. Daß die Stern-Brocot-Brüche des Bildes dabei benachbart sind, liegt daran, daß jeder Matrixvertreter von A Determinante eins besitzt.

Dann ist Ψ bijektiv.

Beweis. Sei die Abbildung $\Phi : N \rightarrow \Gamma$ durch

$$\Phi \left(\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right) \right) := \begin{bmatrix} a & (ad - bc)b \\ c & (ad - bc)d \end{bmatrix}$$

erklärt. Dieses ist unabhängig von der Wahl der Vertreter $(a, c), (b, d)$ zu $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} a & (ad - bc)b \\ c & (ad - bc)d \end{pmatrix} = (ad - bc)^2 = 1$$

liegt das Bild von Φ sicher in Γ .

Es ist klar, daß $\Psi \circ \Phi = \text{id}_N$ gilt. Um $\Phi \circ \Psi = \text{id}_\Gamma$ zu zeigen, sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ beliebig. Dann gilt $ad - bc = 1$ und damit

$$\Phi \circ \Psi(A) = \begin{bmatrix} a & (ad - bc)b \\ c & (ad - bc)d \end{bmatrix} = A.$$

□

Lemma 3.2. *Zwei Ecken $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ aus G sind genau dann im Graphensinne benachbart, wenn sie Stern-Brocot-Nachbarn sind. In diesem Fall gibt es genau vier verschiedene Kanten, die $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ verbinden.*

Beweis. Sei $y \in E(G)$ eine beliebige Kante. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := y^+ \in E_+(G)$, das heißt die eindeutig bestimmte Kante in $E_+(G) \cap \{y, \bar{y}\}$ (siehe Kapitel 1.2). Wegen $A \in \{y, \bar{y}\}$ verbinden A und y dieselben Ecken $\frac{a}{c} = o(A)$ und $\frac{b}{d} = t(A)$. Diese sind wegen $ad - bc = 1$ Stern-Brocot-Nachbarn.

Seien umgekehrt $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ aus $V(G)$ Stern-Brocot-Nachbarn. Sei Φ wie im Beweis von Proposition 3.1. Dann ist $\Phi\left(\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right)\right) = \begin{bmatrix} a & (ad - bc)b \\ c & (ad - bc)d \end{bmatrix}$ in Γ . Nach Proposition 3.1 besitzt es den Anfangspunkt $\frac{a}{c}$, den Endpunkt $\frac{b}{d}$ und ist die einzige Kante in $E_+(G)$ mit dieser Eigenschaft.

Die vier Kanten, die $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ verbinden, sind dann

$$\begin{bmatrix} a & (ad - bc)b \\ c & (ad - bc)d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & -(ad - bc)a \\ d & -(ad - bc)c \end{bmatrix}$$

und ihre Umgekehrten. Aus $|ad - bc| = 1$ folgt $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$. Daher, und wegen $\bar{A} \neq A$ für alle $A \in E_+(G)$ (GRA2), sind diese Kanten paarweise verschieden. □

Seien stets $I := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $V := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $U := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Proposition 3.3. *Es gilt $V^2 = U^3 = I$.*

Beweis. Es ist

$$V^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = I$$

und

$$\begin{aligned} U^3 &= U^2 U = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = I. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.4. Es gilt $V^{-1} = V$ und $U^{-1} = U^2$.

Sei $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ eine Kante aus $E_+(G)$ mit Anfangspunkt $\frac{a}{c}$ und Endpunkt $\frac{b}{d}$,

dann hat die Kante $AV = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}$ die Ecken $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ als Endbeziehungsweise Anfangspunkt. Der Subgraph $[A]_2$ von G sei (mit Bemerkung 1.3) durch $V([A]_2) := \{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\}$ und $E_+([A]_2) := \{A, AV\}$ definiert.

Proposition 3.5. Für alle $A \in \Gamma$ ist $[A]_2$ ein 2-Zykel. Seine Kantenmenge besteht aus genau den vier Kanten, die seine zwei Ecken in G verbinden. Jeder 2-Zykel in G ist von der Form $[A]_2$ für ein geeignetes $A \in \Gamma$.

Beweis. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Ein Isomorphismus $\varphi : Z_2 \rightarrow [A]_2$ ist (mit Satz 1.4) durch $\varphi_V(0) = \frac{a}{c}$, $\varphi_V(1) = \frac{b}{d}$, $\varphi_{E_+}((0,1)) = A$ und $\varphi_{E_+}((1,0)) = AV$ gegeben. Zur Erinnerung: Z_2 ist der Zykelgraph der Länge 2. Die Kanten von $[A]_2$ sind gerade $A, AV, \bar{A}, \overline{AV}$, also die vier Kanten in $E(G)$, die $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ verbinden (Lemma 3.2).

Ist δ ein 2-Zykel in G , dann ist $V(\delta) = \{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\}$ für zwei benachbarte $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in V(G)$. Die vier Kanten von $E(\delta)$ sind genau diejenigen, die $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ verbinden. Sei $A \in E_+(\delta) \subset E_+(G)$, dann ist $V(\delta) = \{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\} = V([A]_2)$ und $E(\delta) = E([A]_2)$. Also gilt $\delta = [A]_2$. \square

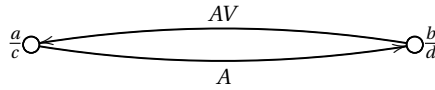


Abbildung E: Der 2-Zykel $[A]_2$ mit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Wegen Proposition 3.3 gilt $[A]_2 = [AV]_2$ für alle $A \in \Gamma$. Die Menge der 2-Zykel in G werde mit K_2 bezeichnet. Abbildung E zeigt ein Diagramm (siehe [Ser80, Chap. I, Par. 2.1]) des 2-Zykels $[I]_2$ in G .

Proposition 3.6. Die Kantenmengen aller 2-Zykel in G zusammengenommen bilden $E(G)$ als eine disjunkte Vereinigung.

Beweis. Zu jedem $\delta \in K_2$ ist $E_+(\delta)$ eine Linksnebenklasse der Untergruppe $\{I, V\}$ in Γ . Diese sind entweder gleich oder disjunkt. Sei L irgendein Vertretersystem der Linksnebenklassen von $\{I, V\}$ in Γ . Es gilt $E([A]_2) = E_+([A]_2) \dot{\cup} \overline{E_+([A]_2)}$ für jedes $A \in L$, also ist

$$E(G) = E_+(G) \dot{\cup} \overline{E_+(G)} = \left(\dot{\bigcup}_{A \in L} E_+([A]_2) \right) \dot{\cup} \left(\dot{\bigcup}_{A \in L} \overline{E_+([A]_2)} \right) = \dot{\bigcup}_{A \in L} E([A]_2).$$

\square

Proposition 3.7. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ beliebig. Die Anfangs- und Endpunkte der Kanten A , AU und AU^2 liegen in $\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{a+b}{c+d}\}$.

Beweis. Für A ist dies wegen $o(A) = \frac{a}{c}$, $t(A) = \frac{b}{d}$ klar. Weiter ist

$$AU = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & a+b \\ -d & c+d \end{bmatrix},$$

also $o(AU) = \frac{b}{d}$ und $t(AU) = \frac{a+b}{c+d}$. Schließlich gilt

$$AU^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a-b & a \\ -c-d & c \end{bmatrix}$$

und damit $o(AU^2) = \frac{a+b}{c+d}$ sowie $t(AU^2) = \frac{a}{c}$. □

Zu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in E_+(G)$ sei der Subgraph $[A]_3$ von G (mit Bemerkung 1.3) durch $V([A]_3) := \{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{a+b}{c+d}\}$ und $E_+([A]_3) := \{A, AU, AU^2\}$ definiert.

Proposition 3.8. Für jedes $A \in \Gamma$ ist $[A]_3$ ein 3-Zykel.

Beweis. Ein Graphenisomorphismus $\varphi: Z_3 \rightarrow \tau$ ist (mit Satz 1.4) durch

$$\varphi_V(0) = \frac{a}{c}, \quad \varphi_V(1) = \frac{b}{d}, \quad \varphi_V(2) = \frac{a+b}{c+d}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_{E_+}((0,1)) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \\ \varphi_{E_+}((1,2)) &= \begin{bmatrix} b & -a-b \\ d & -c-d \end{bmatrix}, \\ \varphi_{E_+}((2,0)) &= \begin{bmatrix} -a-b & a \\ -c-d & c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gegeben. □

Ein 3-Zykel der auf diese Weise konstruiert ist, heiße **stabiler 3-Zykel**. Wegen Proposition 3.3 gilt $[A]_3 = [AU]_3 = [AU^2]_3$ fur alle $A \in \Gamma$. Die Menge der stabilen 3-Zykel werde mit K_3 bezeichnet. Ein Diagramm zu $[I]_3$ ist in Abbildung F dargestellt.

Das „stabil“ in der Definition bezieht sich auf die Invarianz des Zyklus unter der Rechtsmultiplikation seiner Kanten mit U . Beispiel fur einen nicht-stabilen 3-Zykel ist Z mit $V(Z) = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}\}$ und $E_+(Z) = \{V, UV, U^2V\}$, welches unter Multiplikation von rechts mit U nicht einmal in einen Zykel abgebildet wird.

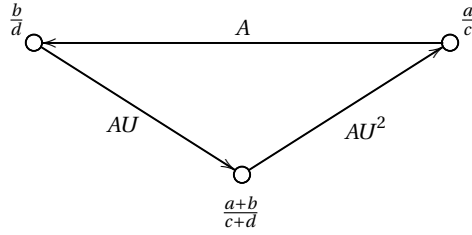


Abbildung F: Der stabile 3-Zykel $[A]_3$ mit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Proposition 3.9. *Seien τ_1 und τ_2 zwei verschiedene stabile 3-Zykel, dann ist der Durchschnitt ihrer Kantenmengen $E(\tau_1) \cap E(\tau_2)$ leer. Die (somit disjunkte) Vereinigung der Kantenmengen aller stabilen 3-Zykel ist gleich $E(G)$.*

Beweis. $E_+(\tau_1)$ und $E_+(\tau_2)$ sind Linksnebenklassen der Untergruppe $\{I, U, U^2\}$ und damit disjunkt oder gleich. Jede Kante aus $E_+(G)$ liegt in einer dieser Nebenklassen und damit in einem stabilen 3-Zykel. Sei L irgendein Vertretersystem der Linksnebenklassen von $\{I, U, U^2\}$ in Γ . Es gilt $E([A]_3) = E_+([A]_3) \dot{\cup} \overline{E_+([A]_3)}$ für alle $A \in L$, also ist

$$E(G) = E_+(G) \dot{\cup} \overline{E_+(G)} = \left(\dot{\bigcup}_{A \in L} E_+([A]_3) \right) \dot{\cup} \left(\dot{\bigcup}_{A \in L} \overline{E_+([A]_3)} \right) = \dot{\bigcup}_{A \in L} E([A]_3).$$

□

Proposition 3.10. *Unter Vorgabe von zwei benachbarten Ecken $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ aus $V(G)$ gibt es genau zwei stabile 3-Zykel, die diese Ecken enthalten.*

Beweis. Die Ecken $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ sind durch genau vier Kanten A , \bar{A} , AV und \overline{AV} mit geeignetem $A \in \Gamma$ verbunden (Lemma 3.2). Diese teilen sich nach Proposition 3.9 zwischen den disjunkten stabilen 3-Zykeln $[A]_3$ und $[AV]_3$ auf. □

Proposition 3.11. *Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ eine Kante aus $E_+(G)$, dann liegt sie in genau einem 2-Zykel δ und genau einem stabilen 3-Zykel τ , nämlich in $\delta = [A]_2$ und in $\tau = [A]_3$.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Propositionen 3.6 und 3.9. □

In Abbildung G ist ein Ausschnitt von G zu sehen. Die stabilen 3-Zykel bestehen aus jeweils denjenigen Kanten, die in der Abbildung ein konkaves Dreieck bilden.

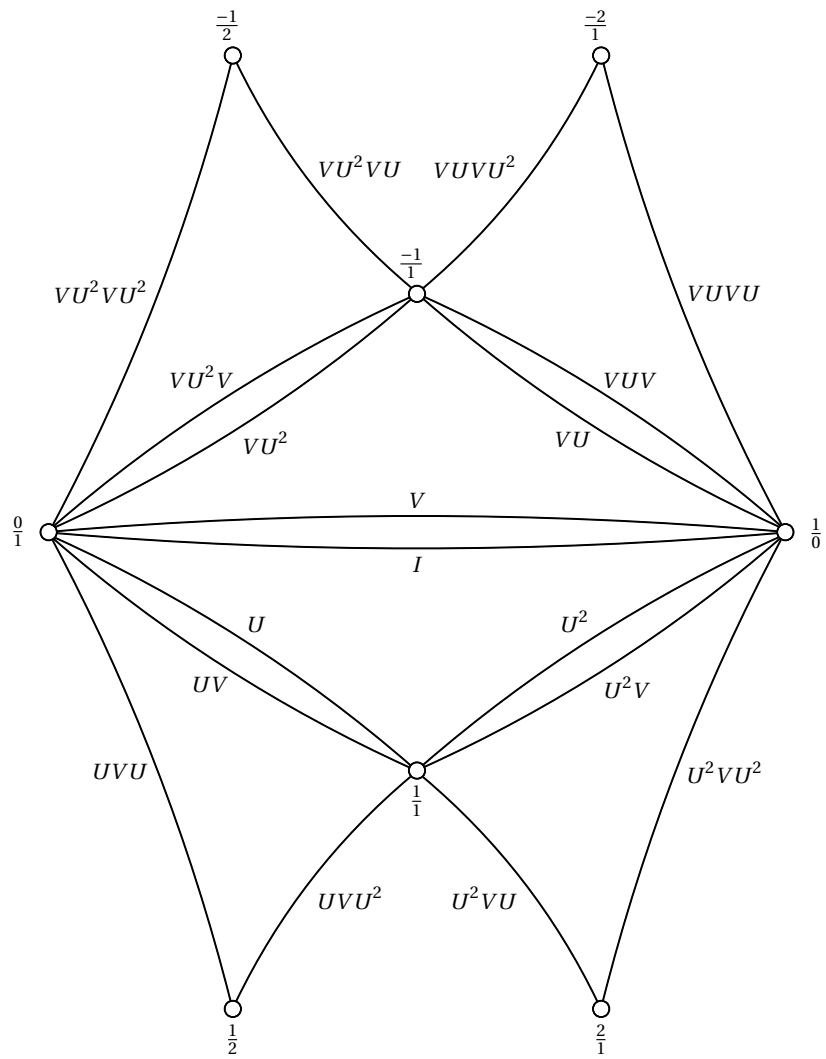


Abbildung G: Einige Kanten im Graphen G.

Definition. Zu einem $A \in \Gamma$ seien $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ gewählt. Es trage A die **Signatur**

- (SIG+), wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (SIG+) erfüllt und
- (SIG-), wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (SIG-) erfüllt.

Mit Proposition 2.5 folgt aus $ad - bc = 1$, daß die Signatur für alle $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ existiert. Nach Bemerkung 2.8 gilt:

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ erfüllt (SIG+) genau dann, wenn $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ (SIG+) erfüllt und
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ erfüllt (SIG-) genau dann, wenn $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ (SIG-) erfüllt,

die Signatur ist also unabhängig vom gewählten Vertreter und damit wohldefiniert.

Bemerkung 3.12. Trägt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ die Signaturen (SIG+) und (SIG-), dann gilt $\{o(A), t(A)\} = \{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\} = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\}$ nach Proposition 2.6 und damit $A \in \{I, V\}$. Dies sind also die einzigen Elemente aus Γ , die (SIG+) und (SIG-) tragen.

Bemerkung 3.13. Sind $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gewählt, dann tragen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ aus Γ und $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ identische Signatur.

Proposition 3.14. Die Kante $A \in \Gamma$ trägt genau dann Signatur (SIG+) beziehungsweise (SIG-), wenn AV (SIG-) beziehungsweise (SIG+) trägt.

Beweis. Nach Bemerkung 2.7 tragen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ identische Signatur.

Diese ist nach Bemerkung 2.8 genau umgekehrt zur Signatur von $\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$, welche die von AV ist. \square

Proposition 3.15. Sei δ ein 2-Zykel in G . Dann gibt es in $E_+(\delta)$ eine Kante mit (SIG+) und eine mit (SIG-).

Beweis. Sei $A \in E_+(\delta)$. Nach Proposition 3.14 erfüllt $AV \in E_+(\delta)$ die umgekehrte Signatur. \square

3.2 Der Graph G^*

Der Graph G^* sei definiert durch $V(G^*) := K_2 \dot{\cup} K_3$, $E_+(G^*) := \Gamma$ und $(o, t)(A) := ([A]_2, [A]_3)$ für alle $A \in E_+(G^*)$. Erneut wird Satz 1.2 verwendet, nach welchem G^* durch diese Angaben bereits eindeutig definiert ist.

Proposition 3.16. *Ecken $\delta \in K_2$ und $\tau \in K_3$ sind in G^* genau dann benachbart, wenn der Durchschnitt $E_+(\delta) \cap E_+(\tau) \subset E_+(G)$ nicht leer ist.*

Beweis. Nach Definition sind δ und τ genau dann verbunden, wenn es ein $A \in \Gamma$ mit $\delta = [A]_2$ und $\tau = [A]_3$ gibt. Dieses liegt als Kante von G in $E_+([A]_2)$ und in $E_+([A]_3)$. Liegt umgekehrt ein A in $E_+(\delta) \cap E_+(\tau)$, dann folgt $\delta = [A]_2$ und $\tau = [A]_3$ aus Proposition 3.11. \square

Bemerkung 3.17. *Seien $\delta \in K_2$ und $\tau \in K_3$ in G^* durch eine Kante $A \in \Gamma$ verbunden, also $\delta = [A]_2$ und $\tau = [A]_3$. Alle Kanten aus $E_+(G^*)$, die δ mit τ verbinden, liegen im Durchschnitt von $E_+([A]_2)$ und $E_+([A]_3)$, also in $\{A, AV\} \cap \{A, AU, AU^2\}$. Wegen $I \neq U, U^2$ und $V \neq I, U, U^2$ ist A die einzige Kante aus $E_+(G^*)$, die $[A]_2$ und $[A]_3$ verbindet.*

Lemma 3.18. *Jede Ecke $[A]_3$ aus K_3 ist in G^* mit genau drei verschiedenen Ecken verbunden, nämlich $[A]_2$, $[AU]_2$ und $[AU^2]_2$, welche alle in K_2 liegen.*

Beweis. Die Kanten von $E_+([A]_3) \subset E_+(G)$ sind A , AU und AU^2 . Nach Proposition 3.16 ist $[A]_3$ also ausschließlich mit den 2-Zykeln $[A]_2$, $[AU]_2$ und $[AU^2]_2$ verbunden. Wäre $[A]_2 = [AU]_2$, dann gälte $A = AU$ oder $AV = AU$, also $I = U$ oder $V = U$. Analog ist $[A]_2 \neq [AU^2]_2$ und $[AU]_2 \neq [AU^2]_2$. \square

Lemma 3.19. *Jede Ecke $[A]_2$ aus K_2 ist in G^* mit genau zwei verschiedenen Ecken verbunden, nämlich $[A]_3$ und $[AV]_3$, welche beide in K_3 liegen.*

Beweis. In $E_+([A]_2)$ liegen die Kanten A und AV . Nach Proposition 3.16 ist $[A]_2$ also mit genau den stabilen 3-Zykeln $[A]_3$ und $[AV]_3$ verbunden. Diese sind voneinander verschieden, da $V \notin \{I, U, U^2\}$ ist. \square

Definition. Die Abbildung $N : \Gamma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei definiert, indem sie einem $A \in \Gamma$ den Wert $N_L(o_G(A)) + N_L(t_G(A))$ zuordne.

Bemerkung 3.20. *Es gibt genau zwei Kanten aus $E_+(G^*)$, deren N -Wert Null ist, nämlich I und V . Alle anderen Kanten haben größere N -Werte.*

Proposition 3.21. *Die zwei Kanten A und AV in einem 2-Zykel $[A]_2$ haben denselben N -Wert.*

Beweis. Ist $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, dann gilt $AV = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}$ und damit $t_G(AV) = o_G(A)$ und $o_G(AV) = t_G(A)$. Es folgt $N(AV) = N_L(t_G(A)) + N_L(o_G(A)) = N(A)$. \square

Lemma 3.22. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ ungleich I, V . Für A gelte (SIG+), also $|a+b| = |a|+|b|, |c+d| = |c|+|d|$. Dann gilt:

- $N(AU), N(AU^2) > N(A)$.
- Es gibt ein $B \in \{AVU, AVU^2\}$ mit der Eigenschaft, daß $N(B) < N(A)$ erfüllt ist, sowie daß für das $C \in \{AVU, AVU^2\}$, welches nicht B ist, $N(C) > N(B)$ gilt.

Vergleiche Abbildung H.

Beweis. Es ist

$$AU = \begin{bmatrix} -b & a+b \\ -d & c+d \end{bmatrix},$$

$$AU^2 = \begin{bmatrix} -a-b & a \\ -c-d & c \end{bmatrix},$$

$$AVU = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a+b \\ c & -c+d \end{bmatrix}$$

und

$$AVU^2 = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{bmatrix}.$$

Also haben A, AU, AU^2, AVU und AVU^2 die folgenden Anfangs- und Endpunkte:

Kante	A	AU	AU^2	AVU	AVU^2
Anfangspunkt	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{a+b}{c+d}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{a-b}{c-d}$
Endpunkt	$\frac{b}{d}$	$\frac{a+b}{c+d}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{a-b}{c-d}$	$\frac{b}{d}$

Da A weder I noch V ist, sind $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ nicht die Brüche $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$. Aus Lemma 2.31 folgt daher $N_L\left(\frac{a}{c}\right) \neq N_L\left(\frac{b}{d}\right)$.

Fall I. $N_L\left(\frac{a}{c}\right) < N_L\left(\frac{b}{d}\right)$. Dann ist mit Proposition 2.32 $\frac{a}{c}$ eines der Stern-Brocot-Eltern von $\frac{b}{d}$. Nach Lemma 2.30 ist $N_1\left(\frac{a}{c}\right) < N_1\left(\frac{b}{d}\right)$. Mit Lemma 2.25 folgt, daß $\frac{a-b}{c-d}$ ebenfalls eines der Eltern von $\frac{b}{d}$ ist, sowie daß $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ die Eltern von $\frac{a+b}{c+d}$ sind. Proposition 2.29 besagt

$$N_L\left(\frac{b}{d}\right) = \max\left\{N_L\left(\frac{a-b}{c-d}\right), N_L\left(\frac{a}{c}\right)\right\} + 1,$$

also gilt

$$N_L\left(\frac{a}{c}\right), N_L\left(\frac{a-b}{c-d}\right) < N_L\left(\frac{b}{d}\right).$$

Ebenfalls nach Proposition 2.29 ist

$$N_L\left(\frac{a+b}{c+d}\right) = \max\left\{N_L\left(\frac{a}{c}\right), N_L\left(\frac{b}{d}\right)\right\} + 1,$$

also

$$N_L\left(\frac{a+b}{c+d}\right) > N_L\left(\frac{a}{c}\right), N_L\left(\frac{b}{d}\right).$$

Es folgt

- $N(AU) = N_L\left(\frac{b}{d}\right) + N_L\left(\frac{a+b}{c+d}\right) > N(A)$,
- $N(AU^2) = N_L\left(\frac{a+b}{c+d}\right) + N_L\left(\frac{a}{c}\right) > N(A)$,
- $N(AVU) = N_L\left(\frac{a}{c}\right) + N_L\left(\frac{a-b}{c-d}\right) < N(A)$,
- $N(AVU^2) = N_L\left(\frac{a-b}{c-d}\right) + N_L\left(\frac{b}{d}\right) > N(AVU)$.

Mit $B := AVU$ und $C := AVU^2$ folgt die zweite Aussage.

Fall II. $N_L\left(\frac{a}{c}\right) > N_L\left(\frac{b}{d}\right)$. Analog zu Fall I folgt $N_L\left(\frac{b}{d}\right), N_L\left(\frac{a-b}{c-d}\right) < N_L\left(\frac{a}{c}\right)$ und $N_L\left(\frac{a+b}{c+d}\right) > N_L\left(\frac{a}{c}\right), N_L\left(\frac{b}{d}\right)$. Also ist

- $N(AU) = N_L\left(\frac{b}{d}\right) + N_L\left(\frac{a+b}{c+d}\right) > N(A)$,
- $N(AU^2) = N_L\left(\frac{a+b}{c+d}\right) + N_L\left(\frac{a}{c}\right) > N(A)$,
- $N(AVU^2) = N_L\left(\frac{a-b}{c-d}\right) + N_L\left(\frac{b}{d}\right) < N(A)$,
- $N(AVU) = N_L\left(\frac{a}{c}\right) + N_L\left(\frac{a-b}{c-d}\right) > N(AVU^2)$.

In diesem Fall folgt mit $B := AVU^2$ und $C := AVU$ die zweite Aussage. □

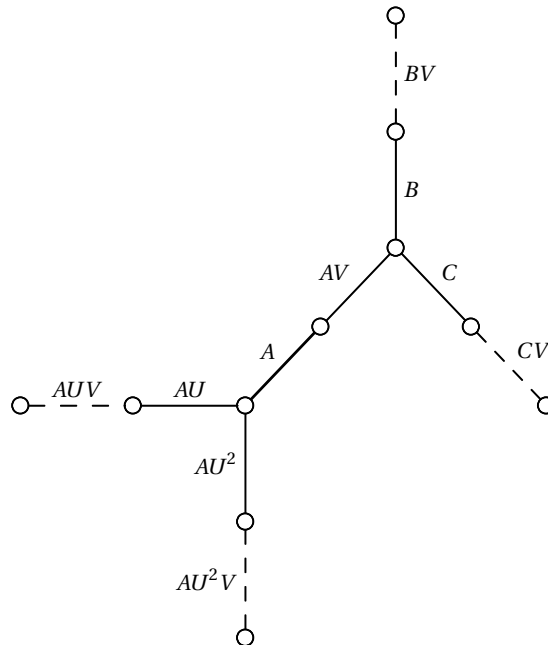


Abbildung H: Die Umgebung einer Kante A in G^* .

Satz 3.23. G^* ist ein Baum.

Beweis. Zuerst werde der Zusammenhang von G^* gezeigt. In G^* besitzt jede Ecke mindestens eine ausgehende Kante. Es genügt also zu zeigen, daß alle Kanten aus $E_+(G^*)$ in der Zusammenhangskomponente von I liegen. Sicher liegt V darin, da es mit I den Anfangspunkt $[V]_2 = [I]_2$ gemein hat.

Sei $A' \in E_+(G^*)$ mit minimalem $N(A')$ innerhalb seiner Zusammenhangskomponente und sei angenommen, daß A' nicht I oder V ist. Die Kanten $A'V$ und A' haben beide $[A']_2$ als Anfangspunkt und liegen daher in derselben Zusammenhangskomponente. Nach Proposition 3.21 haben A' und $A'V$ gleichen N -Wert. Auch $A'V$ ist ungleich I oder V . Nach Proposition 3.15 gibt es ein $A \in \{A', A'V\}$, das (SIG+) erfüllt.

Nach Lemma 3.22 hat AVU oder AVU^2 dann einen geringeren N -Wert als A , ist allerdings über $[A'V]_3$ mit $[A']_2$ verbunden, was der Minimalität von $N(A') = N(A)$ widerspricht. Also kann die Annahme, daß $A' \notin \{I, V\}$ ist, nicht stimmen. Jede Kante liegt in derselben Zusammenhangskomponente wie I , also ist G^* zusammenhängend.

Nun werde die Zykelfreiheit von G^* gezeigt. Dazu sei angenommen, daß ein Zykel Z der Länge $n > 0$ in G^* existiert. Nach Definition ist in G^* keine Ecke durch eine Kante mit sich selbst verbunden. Also ist $n > 1$. Laut Bemerkung 3.17 sind zwei Ecken von G^* durch höchstens eine Kante (und ihre Umgekehrte) verbunden. Daher gilt sogar $n > 2$.

Sei A eine Kante aus $E_+(Z) \subset E_+(G^*)$ mit maximalem N -Wert. Wegen $n > 2$ liegen in $E_+(Z)$ mindestens drei Kanten. Da nur I und V den N -Wert Null besitzen, gilt $N(A) > 0$ und damit $A \neq I, V$.

Nach Proposition 1.13 ist die Ecke $[A]_2$ in Z mit genau zwei anderen Ecken verbunden. Da es bereits in G^* nur zwei Ecken, nämlich $[A]_3$ und $[AV]_3$, gibt, mit denen $[A]_2$ verbunden ist (Lemma 3.19), liegen diese beide in Z . Da Z zusammenhängend ist, sind die Kanten A und AV , die diese Ecken verbinden, in $E_+(Z)$ enthalten.

Da die Kanten A und AV denselben N -Wert haben und eine von beiden nach Proposition 3.15 (SIG+) erfüllt, darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß A (SIG+) erfüllt.

Ebenfalls nach Proposition 1.13 liegen zwei der drei (Lemma 3.18) mit $[A]_3$ verbundenen Ecken in Z . Diese sind $[A]_2$, $[AU]_2$ und $[AU^2]_2$. Entsprechend ist AU oder AU^2 in $E_+(Z)$. Nach Lemma 3.22 gilt jedoch $N(AU), N(AU^2) > N(A)$, was der Maximalität von $N(A)$ und damit der Existenz des Zyklus Z in G^* widerspricht. □

Lemma 3.24. Sei $A \in E_+(G^*) \setminus \{I, V\}$ mit (SIG+). Sei φ der eindeutig bestimmte injektive Pfad in G^* , der $[I]_2$ mit $[A]_2$ verbindet (Proposition 1.15). Dann wird A von φ nicht besucht.

Beweis. Sei n die Länge des Pfades φ . Wegen $[A]_2 \neq [I]_2$ gilt $n > 0$ sowie $N(A) > N(I)$. Da φ_V injektiv und $[A]_2 = \varphi_V(n)$ der Endpunkt von φ ist, gibt es nur eine Kante aus $E_+(\varphi) = E(\varphi) \cap E_+(G^*)$ mit Anfangspunkt $[A]_2$ (Lemma 1.10 mit Bemerkung 1.12). Das heißt, entweder A oder AV liegt in $E_+(\varphi)$.

Sei B' in $E_+(\varphi)$ mit maximalem $N(B')$ und sei $B \in \{B', B'V\}$ eine Kante, die (SIG+) erfüllt (Proposition 3.15). Wegen $N(B) = N(B') > 0$ ist $B \notin \{I, V\}$. Die drei Kanten in G^* mit Endpunkt $[B]_3$ sind B , BU und BU^2 . Nach Lemma 3.22 ist $N(BU), N(BU^2) > N(B)$. Da $N(B) = N(B')$ maximal in $E(\varphi)$ ist, können BU und BU^2 nicht in $E(\varphi)$ liegen. Wäre B selbst in $E(\varphi)$ enthalten, dann gäbe es außer B und \bar{B} keine Kante in $E(\varphi)$, die $[B]_3$ als Anfangs- oder Endpunkt hat. Demnach wäre (mit Lemma 1.11) $[B]_3$ der Anfangs- oder Endpunkt von φ , was nicht sein kann, da diese in K_2 liegen. Also folgt $B \notin E(\varphi)$ und damit $B = B'V$.

Die Ecke $[B']_2 = [B]_2$ ist wegen $B' \in E(\varphi)$ in $V(\varphi)$ enthalten. Da die andere Kante mit diesem Anfangspunkt, B , nicht in $E(\varphi)$ ist, muß $[B]_2$ der Anfangs- oder Endpunkt von φ sein. Wegen $B \notin \{I, V\}$ gilt $[B]_2 = \varphi_V(n) = [A]_2$ und somit $A = B$ oder $A = BV$.

Nach Bemerkung 3.12 tragen A , B , AV und BV , da sie ungleich I oder V sind, nicht beide Signaturen. Also erfüllen A und B ausschließlich (SIG+), AV und BV dagegen ausschließlich (SIG-). Damit folgt $A = B \notin E(\varphi)$. \square

Anders formuliert ist die Aussage von Lemma 3.24, daß von den zwei Kanten A und AV in G^* , $A \notin \{I, V\}$, diejenige, die (SIG+) erfüllt, weiter von I entfernt ist, als die andere. Dies wird in Satz 3.38 konkretisiert werden. Die Signatur darf also als eine Art Richtung verstanden werden: Eine Kante mit positiver Signatur zeigt von $[I]_2$ weg, während Kanten ungleich I, V mit (SIG-) auf $[I]_2$ zuweisen.

3.3 Ein Beweis für die Gruppenstruktur der Modulgruppe

Lemma 3.25. Seien A, B zwei verschiedene Kanten aus $E_+(G^*)$. Gilt $o(A) = o(B)$, dann ist $A^{-1}B = V$. Gilt $t(A) = t(B)$, dann ist $A^{-1}B \in \{U, U^2\}$.

Beweis. Ist $o(A) = o(B)$, dann ist $[A]_2 = [B]_2$ und damit $B \in \{A, AV\}$. Wegen $A \neq B$ muß $B = AV$ und damit $A^{-1}B = V$ gelten.

Ist $t(A) = t(B)$, dann ist $[A]_3 = [B]_3$, also $B \in \{A, AU, AU^2\}$. Da $A \neq B$ ist, gilt $B = AU$ oder $B = AU^2$. Daraus folgt $A^{-1}B = U$ oder $A^{-1}B = U^2$. \square

In P_n , dem Pfadgraphen der Länge n , seien die Kanten wie gehabt mit $(k, k+1)$ und $(\bar{k}, \bar{k}+1)$ für $k = 0, \dots, n-1$ bezeichnet. Die eindeutig bestimmte Kante in $E_+(G^*) \cap \{y, \bar{y}\}$ zu einem $y \in E(G^*)$ sei wie in Kapitel 1.2 mit y^+ bezeichnet.

Sei C_2 die zyklische Gruppe mit zwei Elementen und Erzeuger v und sei C_3 die zyklische Gruppe mit drei Elementen und u als (einem der zwei) Erzeuger. Das freie Produkt von C_2 und C_3 (siehe [Ser80, Chap. I, Par. 1.2]) werde mit $C_2 * C_3$ bezeichnet.

Satz 3.26. Die Modulgruppe Γ ist isomorph zu $C_2 * C_3$.

Beweis. Seien $\Phi_2 : C_2 \rightarrow \Gamma$ und $\Phi_3 : C_3 \rightarrow \Gamma$ die durch $v \mapsto V$ und $u \mapsto U$ definierten Homomorphismen. Aufgrund der universellen Eigenschaft des freien Produkts [Ser80, Chap. I, Par. 1.1] existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\Phi : C_2 * C_3 \rightarrow \Gamma$, so daß

$$\begin{array}{ccccc} C_2 & \xrightarrow{\iota_{C_2}} & C_2 * C_3 & \xleftarrow{\iota_{C_3}} & C_3 \\ & \searrow \Phi_2 & \downarrow \Phi & \swarrow \Phi_3 & \\ & & \Gamma & & \end{array}$$

kommutiert, wobei ι_{C_2} und ι_{C_3} die kanonischen Injektionen sind.

Eine Abbildung $\Psi : \Gamma \rightarrow C_2 * C_3$ werde folgendermaßen konstruiert: Sei $A \in \Gamma$ beliebig. Ist $A = I$, dann sei $\Psi(A)$ das Einselement in $C_2 * C_3$. Ansonsten sei φ der eindeutig bestimmte injektive Pfad in G^* , der I als erste und A als letzte Kante besitzt (Proposition 1.17). Sei n die Länge von φ . Da φ mindestens zwei verschiedene Kanten aus $E_+(G^*)$ besucht, gilt $n \geq 2$. Sei $B_k := \varphi_E((k, k+1))^+$ für alle $k = 0, \dots, n-1$ und sei $D_k := B_k^{-1} B_{k+1}$ für $k = 0, \dots, n-2$. Dann ist nach Lemma 3.25 $D_k \in \{V, U, U^2\}$ und es gilt

$$\prod_{k=0}^{n-2} D_k = I^{-1} B_1 B_1^{-1} \dots B_{n-2} B_{n-2}^{-1} A = A.$$

Sei $\psi : \{V, U, U^2\} \rightarrow \{v, u, u^2\} \subset C_2 * C_3$ durch $\psi(V) = v$, $\psi(U) = u$ und $\psi(U^2) = u^2$ erklärt. Die Abbildung Ψ sei für A dann als

$$\Psi(A) := \prod_{k=0}^{n-2} \psi(D_k)$$

definiert. Es ist

$$\Phi(\Psi(A)) = \Phi\left(\prod_{k=0}^{n-2} \psi(D_k)\right) = \prod_{k=0}^{n-2} \Phi(\psi(D_k)) = \prod_{k=0}^{n-2} D_k = A$$

für $A \neq I$ und $\Phi(\Psi(I)) = I$ nach Definition. Also besitzt Φ ein Rechtsinverses und ist damit surjektiv.

Seien nun $A \in \Gamma$ beliebig und $B \in \{V, U\}$. Es soll $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$ gezeigt werden. Zuerst sei bemerkt, daß $\Psi|_{\{V, U, U^2\}} = \psi$ ist. Ist $A = I$, dann gilt $\Psi(AB) = \Psi(B) = \Psi(A)\Psi(B)$. Gilt $AB = I$, dann ist $A = B^{-1}$ und wegen $A, B \in \{V, U, U^2\}$ folgt $\Psi(A)\Psi(B) = \psi(A)\psi(B) = \Psi(I)$ nach Definition von ψ .

Gelte nun $A \neq I$ und $AB \neq I$. Seien φ, n , die $B_k, k = 0, \dots, n-1$, und die $D_k, k = 0, \dots, n-2$, zu A wie oben. Es soll der eindeutig bestimmte injektive Pfad φ' der Länge $n' \geq 2$ mit I als erster und AB als letzter Kante bestimmt werden. Aus $B'_k := \varphi'((k, k+1))^+, k = 0, \dots, n'-1$, und $D'_k := B'_k{}^{-1}B'_{k+1}, k = 0, \dots, n'-2$, wird dann $\Psi(AB)$ errechnet.

Ist $D_{n-2} = V$, dann sind $A = B_{n-1}$ und $AV = B_{n-2}$ in $E(\varphi)$. Da es nur eine Kante geben kann, deren Anfangspunkt der Endpunkt des Pfades ist (Lemma 1.10 mit Bemerkung 1.12), ist $\varphi_V(n) = [A]_3$. Ist $D_{n-2} \in \{U, U^2\}$, dann ist analog $\varphi_V(n) = [A]_2$. Die folgenden Fälle werden unterschieden:

Fall I.a. $D_{n-2} = B^{-1}, B = V$. Dann ist $AB = \prod_{k=0}^{n-3} D_k$. Sei $\varphi' := \varphi|_{[0, n-1]}$ (zur Definition des Teilpfades siehe Kapitel 1.3). Dann gilt $n' = n-1$ und $B'_k = B_k, D'_k = D_k$ für alle geeigneten k .

Fall I.b. $D_{n-2} = B^{-1}, B = U$. Dann ist $AB = \prod_{k=0}^{n-3} D_k$. Sei $\varphi' := \varphi|_{[0, n-1]}$. Wie in Fall I.a gilt $n' = n-1$ und $B'_k = B_k, D'_k = D_k$ für alle geeigneten k .

Fall II. $D_{n-2} = U, B = U$. Dann ist $AB = \left(\prod_{k=0}^{n-3} D_k\right)U^2$. Da φ injektiv ist, gibt es laut Lemma 1.11 genau zwei Kanten in $E(\varphi)$ mit dem Endpunkt $\varphi_V(n-1) = [A]_3$. Da $AU^2 = \varphi_E((n-2, n-1))^+$ und $A = \varphi_E((n-1, n))^+$ diese zwei Kanten sind, kann $AB = AU$ nicht auch in $E(\varphi)$ liegen. Weiter folgt $[AU]_2 \notin V(\varphi)$, da das Bild von φ zusammenhängend ist.

Sei φ' aus φ konstruiert, indem die letzte Ecke $\varphi'_V(n)$ zu $[AU]_2$ und damit die letzte Kante $\varphi'_E((n-1, n))^+$ zu AB und abgeändert wird. Das heißt φ' ist die in Satz 1.8 definierte Verkettung von $\varphi|_{[0, n-1]}$ mit dem injektiven Pfad, der $[A]_3$ und $[AU]_2$ verbindet. Es gilt $n' = n$. Für alle $k = 0, \dots, n'-2$, ist $B'_k = B_k$. Weiter ist $B'_{n'-1} = B_{n-1}U$. Also gilt $D'_k = D_k, k = 0, \dots, n'-3$, und $D'_{n'-2} = D_{n-2}U$.

Fall III. $D_{n-2} = V, B = U$. Dann ist $AB = \left(\prod_{k=0}^{n-2} D_k\right)U$. Die Kante $AB = AU$ kann nicht in $E(\varphi)$ liegen, da $[A]_3$ der Endpunkt des Pfades φ ist und daher nur eine Kante aus $E_+(G^*)$ mit diesem Endpunkt, nämlich A , in $E(\varphi)$ liegen kann (Lemma 1.10). Weiter folgt, daß $[AU]_2$ nicht in $V(\varphi)$ liegt.

Sei φ' aus φ durch Anfügen von $[AB]_2$ als zusätzlicher Ecke und damit AB als zusätzlicher Kante gewonnen. Das heißt φ' ist die Verkettung von φ mit dem injektiven Pfad, der $[A]_3$ mit $[AB]_2$ verbindet.

Dann gilt $n' = n+1$ sowie $B'_k = B_k, k = 0, \dots, n'-2$, und $B'_{n'-1} = B_{n-1}U$. Es folgt $D'_k = D_k, k = 0, \dots, n'-3$, und $D'_{n'-2} = U$.

Fall IV. $D_{n-2} \in \{U, U^2\}, B = V$. Dann ist $AB = \left(\prod_{k=0}^{n-2} D_k\right)V$. Die Kante $AB = AV$ kann nicht in $E(\varphi)$ liegen, da $[A]_2$ der Endpunkt des Pfades φ ist und nur eine

Kante aus $E_+(G^*)$ mit diesem Anfangspunkt, nämlich A , in $E(\varphi)$ liegen kann (Lemma 1.10 mit Bemerkung 1.12). Insbesondere ist auch $[AV]_3$ nicht in $V(\varphi)$ enthalten.

Sei φ' aus φ durch Anfügen von $[AB]_3$ als zusätzlicher Ecke und damit AB als zusätzlicher Kante gewonnen. Das heißt φ' ist die Verkettung von φ mit dem injektiven Pfad, der $[A]_2$ mit $[AB]_3$ verbindet.

Dann gilt $n' = n + 1$ sowie $B'_k = B_k$, $k = 0, \dots, n' - 2$, und $B'_{n'-1} = B_{n-1}V$. Es folgt $D'_k = D_k$, $k = 0, \dots, n' - 3$, und $D'_{n'-2} = V$.

In jedem der Fälle ist φ' der eindeutig bestimmte injektive Pfad, der I als erste und AB als letzte Kante besitzt. Also ist

$$\Psi(AB) = \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-3} \psi(D_k) = \prod_{k=0}^{n-3} \psi(D_k) v v = \Psi(A)\Psi(B), & \text{Fall I.a,} \\ \prod_{k=0}^{n-3} \psi(D_k) = \prod_{k=0}^{n-3} \psi(D_k) u^2 u = \Psi(A)\Psi(B), & \text{Fall I.b,} \\ \left(\prod_{k=0}^{n-3} \psi(D_k)\right) u^2 = \left(\prod_{k=0}^{n-2} \psi(D_k)\right) u = \Psi(A)\Psi(B), & \text{Fall II,} \\ \left(\prod_{k=0}^{n-2} \psi(D_k)\right) u = \Psi(A)\Psi(B), & \text{Fall III,} \\ \left(\prod_{k=0}^{n-2} \psi(D_k)\right) v = \Psi(A)\Psi(B), & \text{Fall IV.} \end{cases}$$

Es gilt also $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$ für $B \in \{V, U\}$ und auch

$$\Psi(AU^2) = \Psi(AUU) = \Psi(AU)\Psi(U) = \Psi(A)\Psi(U)\Psi(U) = \Psi(A)\Psi(U^2).$$

Sei $\alpha \in C_2 * C_3$ beliebig, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Folge $(x_k)_{k=0, \dots, m-2}$ in $\{v, u, u^2\}$ mit $\alpha = \prod_{k=0}^{m-2} x_k$. Es gilt

$$\Psi(\Phi(\alpha)) = \Psi\left(\Phi\left(\prod_{k=0}^{m-2} x_k\right)\right) = \Psi\left(\prod_{k=0}^{m-2} \Phi(x_k)\right) = \prod_{k=0}^{m-2} \Psi(\Phi(x_k)) = \prod_{k=0}^{m-2} x_k = \alpha.$$

Da Ψ auch ein Linksinverses zu Φ ist, sind also beide Abbildungen bijektiv und damit Φ insbesondere ein Isomorphismus. \square

Folgerung. Die Modulgruppe Γ ist von V und U erzeugt. Wegen $V^{-1} = V$ und $U^{-1} = U^2$ (Bemerkung 3.4) kann jedes Element aus Γ sogar als Produkt in V und U dargestellt werden.

Bemerkung 3.27. Die Abbildung Ψ aus dem Beweis ist ein Isomorphismus.

Beweis. Jedes Element aus Γ kann als Produkt in V und U geschrieben werden. Da Ψ bezüglich dieser Elemente multiplikativ ist, ist es ein Homomorphismus. \square

3.4 Die Wortlängenmetrik auf der Modulgruppe

Seien e_2 und e_3 die Einselemente in C_2 beziehungsweise C_3 . Seien v und u wie oben Erzeuger dieser Gruppen, also $C_2 = \langle v \rangle$ und $C_3 = \langle u \rangle$. Sei e das Einselement in $C_2 * C_3$.

Definition. Ein **reduziertes Wort** in $C_2 * C_3$ ist ein Tripel (n, i, ω) aus

- einer Zahl $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- einer Folge $(i_k)_{k=1 \dots n}$ in $\{2, 3\}$ mit $i_k \neq i_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-1$, und
- einer Folge $(\omega_k)_{k=1, \dots, n}$ mit $\omega_k \in C_{i_k} \setminus \{e_{i_k}\}$.

Die Folgenglieder von ω sind also v , u oder u^2 wobei auf v eine Potenz von u folgt und auf u oder u^2 wiederum v folgt. Vergleiche [Ser80, Chap. I, Par. 1.2]. Das Produkt $\prod_{k=1}^n \omega_k$ werde mit $\prod \omega$ abgekürzt.

Satz 3.28. *Jedes Element aus $C_2 * C_3$ hat eine eindeutige Darstellung als reduziertes Wort, das heißt zu jedem $a \in C_2 * C_3$ gibt es genau ein reduziertes Wort (n, i, ω) mit $\prod \omega = a$.*

Beweis. [Ser80, Chap. I, Par. 1.2, Thm. 1] □

Bemerkung 3.29. *Die reduzierten Wörter zu e und v sind $(0, (), ())$ beziehungsweise $(1, (2), (v))$.*

Lemma 3.30. *Zu $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n \in \{1, 2\}$ und $x, y \in \{0, 1\}$ seien*

- $\bar{n} = 2n + x - y$,
- $\bar{i} = \left(\overbrace{2, 3, 2, 3, 2, \dots, 3, 2, 3}^{2n-2 \text{ Glieder}}, \frac{1-y}{2} \right)$,
- $\bar{\omega} = \left(\overbrace{v}^x, u^{p_1}, v, u^{p_2}, v, \dots, u^{p_{n-1}}, v, u^{p_n}, \overbrace{v}^{1-y} \right)$,

wobei $\overbrace{\quad}^a$ über einem Folgenglied bedeute, daß es ausgelassen wird, falls $a = 0$ ist.

Dann ist $(\bar{n}, \bar{i}, \bar{\omega})$ ein reduziertes Wort mit

$$\prod \bar{\omega} = v^x (u^{p_1} v) (u^{p_2} v) \dots (u^{p_n} v) v^y.$$

Beweis. Daß $(\bar{n}, \bar{i}, \bar{\omega})$ ein reduziertes Wort ist, folgt unmittelbar aus seiner Konstruktion: In \bar{i} wechseln sich stets 2 und 3 ab, die Glieder von $\bar{\omega}$ sind ausschließlich v , u und u^2 . Es ist

$$\begin{aligned} \prod \bar{\omega} &= v^x (u^{p_1} v) (u^{p_2} v) \dots (u^{p_{n-1}} v) u^{p_n} v^{1-y} \\ &= v^x (u^{p_1} v) (u^{p_2} v) \dots (u^{p_{n-1}} v) u^{p_n} v v^y \\ &= v^x (u^{p_1} v) (u^{p_2} v) \dots (u^{p_{n-1}} v) (u^{p_n} v) v^y. \end{aligned}$$

□

Satz 3.31. Zu jedem Element A von Γ , das weder I noch V ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}$, eine eindeutig bestimmte Folge $(p_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ in $\{1, 2\}$ und eindeutig bestimmte $x, y \in \{0, 1\}$, so daß

$$A = V^x (U^{p_1} V) (U^{p_2} V) \dots (U^{p_n} V) V^y$$

ist.

Beweis. Sei P die Menge der $(n, p_1, \dots, p_n, x, y)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $p_k \in \{1, 2\}$, $k = 1, \dots, n$, und $x, y \in \{0, 1\}$. Sei R die Menge der reduzierten Wörter, die nicht e oder v entsprechen. Die Abbildung $f : P \rightarrow R$ ordne einem $(n, p_1, \dots, p_n, x, y)$ das reduzierte Wort zum Produkt

$$v^x (u^{p_1} v) (u^{p_2} v) \dots (u^{p_n} v) v^y$$

zu.

Nach Lemma 3.30 enthält dieses Wort wegen $n \geq 1$ mindestens eine Potenz von u , ist also weder e noch v .

Seien $\alpha = (n, p_1, \dots, p_n, x, y)$, $\alpha' = (n', p'_1, \dots, p'_{n'}, x', y')$ aus P mit $f(\alpha) = f(\alpha')$. Nach Lemma 3.30 sind die reduzierten Wörter zu α und α' durch

- $\bar{n} = 2n + x - y$,
- $\bar{i} = (\overset{x}{\bar{2}}, 3, 2, \dots, 3, 2, 3, \overset{1-y}{\bar{2}})$,
- $\bar{\omega} = (\overset{x}{\bar{v}}, u^{p_1}, v, \dots, u^{p_{n-1}}, v, u^{p_n}, \overset{1-y}{\bar{v}})$,

beziehungsweise

- $\bar{n}' = 2n' + x' - y'$,
- $\bar{i}' = (\overset{x'}{\bar{2}}, 3, 2, \dots, 3, 2, 3, \overset{1-y'}{\bar{2}})$,
- $\bar{\omega}' = (\overset{x'}{\bar{v}}, u^{p'_1}, v, \dots, u^{p'_{n'-1}}, v, u^{p'_{n'}}, \overset{1-y'}{\bar{v}})$

gegeben. Diese sind wegen $f(\alpha) = f(\alpha')$ und der Eindeutigkeit reduzierter Wörter gleich. Aus $\bar{i}_1 = \bar{i}'_1$ folgt $x = x'$. Es ist

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \bar{n}', \\ 2n + x - y &= 2n' + x' - y', \\ 2n - y &= 2n' - y', \end{aligned}$$

also folgt $y = y'$ und $n = n'$. Aus $\bar{\omega}_k = \bar{\omega}'_k$, $k = 1, \dots, \bar{n}$, folgt $p_1 = p'_1$, $p_2 = p'_2$, ..., $p_n = p'_n$ und damit $\alpha = \alpha'$. Also ist f injektiv.

Zu einem reduzierten Wort (n', i', ω') für ein Element aus $C_2 * C_3$, das nicht e oder v ist, werde nun ein $(n, p_1, \dots, p_n, x, y)$ angegeben.

Gilt $n' \leq 1$, dann ist $\prod \omega'$ entweder e , v , u oder u^2 . Die ersten beiden dieser Fälle dürfen ausgeschlossen werden. Es ist $f((1, 1, 0, 1)) = u$ und $f((1, 2, 0, 1)) = u^2$. Sei nun $n' \geq 2$. Dann ist $n' - x + y \geq 1$.

Ist $\omega'_1 = v$, dann sei $x = 1$, sonst sei $x = 0$. Ist $\omega'_{n'} = v$, dann sei $y = 0$, sonst sei $y = 1$.

Sei

- $n'' := n' - x + y$,
- $i''_k := i'_{k+x}$ für $k = 1, \dots, n' - x$,
- $\omega''_k := \omega'_{k+x}$ für $k = 1, \dots, n' - x$.
- Falls $y = 1$ ist, seien $i''_{n'-x+y} := 2$ sowie $\omega''_{n'-x+y} := v$.

Es ist $i''_k = i'_{k+x} \neq i'_{k+x+1} = i''_{k+1}$ für $k = 1, \dots, n' - x$. Weiter ist $\omega''_k = \omega'_{k+x}$ nicht das Einselement in C_2 beziehungsweise C_3 . Ist $y = 1$, dann ist $i'_{n'} = 3$, also $i''_{n'-x+y-1} = i'_{n'} = 3$ und damit $i''_{n'-x} \neq i''_{n'-x+y}$. Sicher ist $\omega''_{n'-x+y} = v$ ungleich e , so es existiert.

Also ist (n'', i'', ω'') ein reduziertes Wort der Länge $n'' \geq 1$ in $C_2 * C_3$.

Nach Konstruktion beginnt (n'', i'', ω'') mit u oder u^2 und endet auf v . In einem reduzierten Wort wechseln sich v und u, u^2 ab, also gilt $n'' \equiv 0 \pmod{2}$. Sei $n := n''/2$. Für $k = 1, \dots, n$ sei $p_k = 1$, falls $\omega''_{2(k-1)+1} = u$, und $p_k = 2$, falls $\omega''_{2(k-1)+1} = u^2$ ist.

Nach Konstruktion gilt dann

$$f((n, p_1, \dots, p_n, x, y)) = v^x (u^{p_1} v) (u^{p_2} v) \dots (u^{p_n} v) v^y = v^x \prod \omega'' v^y = \prod \omega',$$

die Abbildung f ist also auch surjektiv.

Sei $\Phi : C_2 * C_3 \rightarrow \Gamma$ der Isomorphismus aus Satz 3.26. Es gilt $\Phi(x) \in \{I, V\}$ genau dann, wenn $x \in \{e, v\}$ ist. Die Abbildung $g : P \rightarrow \Gamma \setminus \{I, V\}$, die durch

$$g((n, p_1, \dots, p_n, x, y)) := \Phi\left(\prod f(n, p_1, \dots, p_n, x, y)\right)$$

definiert sei, ist als Verknüpfung der bijektiven Abbildungen $f, \omega \mapsto \prod \omega$ und $\Phi|_{(C_2 * C_3) \setminus \{e, v\}}$ bijektiv. Es gilt

$$g((n, p_1, \dots, p_n, x, y)) = V^x (U^{p_1} V) (U^{p_2} V) \dots (U^{p_n} V) V^y.$$

Also gibt es für jedes $A \neq I, V$ genau eine Darstellung als

$$A = V^x (U^{p_1} V) (U^{p_2} V) \dots (U^{p_n} V) V^y$$

mit geeigneten n, p_k, x, y . □

Auf $C_2 * C_3$ ist eine natürliche Metrik d_L definiert, die **Wortlängenmetrik**. Diese ordnet einem Paar (x, y) von Elementen aus $C_2 * C_3$ die Länge (also n) des eindeutig bestimmten reduzierten Wortes (n, i, ω) zu $x^{-1}y$ zu. Vergleiche [dH00, Chap. IV.A, Definition 1].

Bemerkung 3.32. $C_2 * C_3$ operiert auf sich selbst von links durch Isometrien.

Beweis. Seien $a, x, y \in C_2 * C_3$, dann ist $x^{-1}a^{-1}ay = x^{-1}y$ und damit

$$d_L(ax, ay) = d_L(x, y).$$

□

Die Metrik d_L überträgt sich unter dem Isomorphismus $\Phi : C_2 * C_3 \rightarrow \Gamma$ zu einer Metrik $D_L : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$D_L(A, B) := d_L(\Phi^{-1}(A), \Phi^{-1}(B)).$$

Bemerkung 3.33. Es gilt $D_L(I, I) = 0$ und $D_L(I, V) = 1$.

Bemerkung 3.34. Die Modulgruppe operiert auf sich selbst von links durch Isometrien. Insbesondere ist $D_L(A, B) = D_L(I, A^{-1}B)$ für alle $A, B \in \Gamma$.

Satz 3.35. Zu $A \notin \{I, V\}$ seien n, p_1, \dots, p_n, x und y wie in Satz 3.31, dann gilt $D_L(I, A) = 2n + x - y$.

Beweis. Es ist $D_L(I, A) = d_L(e, \Phi^{-1}(A))$, welches als die Länge des eindeutig bestimmten reduzierten Wortes zu $\Phi^{-1}(A) = v^x(u^{p_1}v)(u^{p_2}v)\dots(u^{p_n}v)v^y$ definiert ist, also $2n + x - y$ nach Lemma 3.30. □

Definition. Die Abbildung $N_L : \Gamma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei durch

$$N_L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) := N_L\left(\frac{|a|+|b|}{|c|+|d|}\right)$$

festgelegt. Diese Definition ist durch die Betragnahme unabhängig von der Wahl des Vertreters.

Lemma 3.36. Für jedes $A \in \Gamma$ gilt $N_L(A) = N_L(VA) = N_L(AV) = N_L(VAV)$.

Beweis. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Es gilt

$$VA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix}$$

und damit $N_L(VA) = N_L\left(\frac{|c|+|d|}{|a|+|b|}\right)$.

Aus

$$AV = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}$$

folgt $N_L(AV) = N_L\left(\frac{|b|+|a|}{|d|+|c|}\right)$.

Nach Bemerkung 2.28 ist $N_L\left(\frac{|a|+|b|}{|c|+|d|}\right) = N_L\left(\frac{|c|+|d|}{|a|+|b|}\right)$, also besitzen A, VA, AV denselben N_L -Wert.

Schließlich folgt $N_L(VAV) = N_L(VA) = N_L(A)$ mit dem bereits Bewiesenen. \square

Seien L und R durch

$$L := UV = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$R := U^2V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

definiert.

Lemma 3.37. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_n \in \{1, 2\}$ und sei

$$A = (U^{p_1}V)(U^{p_2}V)\dots(U^{p_n}V),$$

also ein Produkt in L und R . Dann gilt:

- Es gibt einen Vertreter von A , dessen Matrixeinträge alle größer oder gleich Null sind.
- $N_L(A) = n + 1$.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang folgt mit $N_L(L) = N_L\left(\frac{1}{1+1}\right) = 2$ und $N_L(R) = N_L\left(\frac{1+1}{1}\right) = 2$. In den angegebenen Vertretern von L und R sind alle Einträge größer oder gleich Null.

Sei zum Induktionsschritt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mit $a, b, c, d \geq 0$ gegeben.

Die Elemente L und R bewirken bei Rechtsmultiplikation an A

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} L = \begin{bmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix},$$

eine Spalte wird, als Bruch aufgefasst, also durch einen Medianten beider Spalten ersetzt.

Wegen $a, b, c, d \geq 0$ gilt $a + b, c + d \geq 0$. Somit sind alle Matrixeinträge von AL und AR größer oder gleich Null. Weiter bedeutet dies, daß AL und AR (SIG+) erfüllen.

Da $a + c$ und $b + d$ nicht Null sein können, gilt $a + c, b + d < a + b + c + d$. Also sind $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}$ die in Proposition 2.22 charakterisierten Stern-Brocot-Eltern von $\frac{a+b}{c+d}$. Laut Proposition 2.29 gilt dann $N_L\left(\frac{a}{c}\right), N_L\left(\frac{b}{d}\right) < N_L\left(\frac{a+b}{c+d}\right)$.

Ebenso gilt $a + b + c + d, b + d < a + b + b + c + d + d$. Also sind $\frac{a+b}{c+d}, \frac{b}{d}$ die Stern-Brocot-Eltern von $\frac{a+b+b}{c+d+d}$. Ebenfalls mit Proposition 2.29 folgt dann

$$\begin{aligned} N_L(AL) &= N_L\left(\frac{a+b+b}{c+d+d}\right) \\ &= \max\left\{N_L\left(\frac{a+b}{c+d}\right), N_L\left(\frac{b}{d}\right)\right\} + 1 \\ &= N_L\left(\frac{a+b}{c+d}\right) + 1 \\ &= N_L(A) + 1. \end{aligned}$$

Der Beweis für $N_L(AR) = N_L(A) + 1$ geht analog. Bei jeder Rechtsmultiplikation mit L oder R wächst der N_L -Wert also um genau eins. \square

Satz 3.38. Sei mit t die Transposition eines Elementes aus Γ bezeichnet. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ nicht I oder V und seien n, x, y und $p_k, k = 1, \dots, n$, dazu wie in Satz

3.31. Dann gilt $n = N_L(A) - 1 = N_L\left(\frac{|a|+|b|}{|c|+|d|}\right) - 1$,

$$y = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ (SIG-) erfüllt,} \\ 0, & \text{falls } A \text{ (SIG+) erfüllt,} \end{cases}$$

und

$$x = \begin{cases} 1, & \text{falls } A^t \text{ (SIG-) erfüllt,} \\ 0, & \text{falls } A^t \text{ (SIG+) erfüllt.} \end{cases}$$

Beweis. Nach Lemma 3.36 gilt $N_L(A) = N_L(VA) = N_L(AV) = N_L(VAV)$, also

$$\begin{aligned} N_L(A) &= N_L(V^x(U^{p_1}V)(U^{p_2}V)\dots(U^{p_n}V)V^y) \\ &= N_L((U^{p_1}V)(U^{p_2}V)\dots(U^{p_n}V)), \end{aligned}$$

welches nach Lemma 3.37 gleich $n + 1$ ist.

Sei $A' := (U^{p_1}V)(U^{p_2}V)\dots(U^{p_n}V)$. Es gilt $A = V^x A' V^y$. Da es von A' ebenfalls nach Lemma 3.37 einen Vertreter $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ mit $a', b', c', d' \geq 0$ gibt, erfüllt es (SIG+), also $|a' + b'| = |a'| + |b'|$ und $|c' + d'| = |c'| + |d'|$.

Da $A' = V^x A' V^y$ ist und $A \neq I, V$ gilt, folgt, daß A' ebenfalls ungleich I und V ist. Aus Bemerkung 3.12 folgt dann, daß A' nicht sowohl (SIG+) als auch (SIG-) erfüllt.

Es ist

$$V \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c' & -d' \\ a' & b' \end{bmatrix}.$$

Da $|-c' - d'| = |-c'| + |-d'|$ und $|a' + b'| = |a'| + |b'|$ gilt, erfüllt VA' ebenfalls (SIG+). Proposition 3.14 besagt, daß Rechtsmultiplikation mit V die Signatur wechselt. Also ist $y = 0$ genau dann, wenn A (SIG+) erfüllt.

Die transponierten Elemente A'^t und $(A'V)^t = V^t A'^t = VA'^t$ erfüllen ebenfalls (SIG+), da $a', b', c', d' \geq 0$ sind. Es gilt $(V^x A' V^y)^t = V^y A'^t V^x$, also folgt, daß $x = 0$ ist, genau dann, wenn A^t (SIG+) erfüllt. \square

Folgerung. *Mit den Bezeichnungen aus Satz 3.38 gilt*

$$D_L(I, A) = 2 \left(N_L \left(\frac{|a| + |b|}{|c| + |d|} \right) - 1 \right) + x - y.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.35. \square

Wir haben nun mit Satz 3.38 ein Resultat über den Zusammenhang zwischen Matrixkoeffizienten und Wortlänge. Die Werte x und y können aus den Vorzeichen der Koeffizienten direkt abgelesen werden, eine effiziente Methode zur Berechnung von $N_L \left(\frac{|a| + |b|}{|c| + |d|} \right)$ wird Satz 3.42 liefern.

3.5 Die Wortlängenmetrik und Pfade in G^*

Die Umkehrabbildung Ψ zum Isomorphismus $\Phi : C_2 * C_3 \rightarrow \Gamma$ aus dem Beweis von Satz 3.26 soll noch einmal herangezogen werden. Für $A \in \Gamma$ ungleich I war $\Psi(A)$ folgendermaßen definiert:

Sei φ der eindeutig bestimmte injektive Pfad in G^* , der I als erste und A als letzte Kante besitzt (Proposition 1.17). Sei n die Länge von φ .

Seien $D_k = (\varphi_E((k, k+1))^+)^{-1} \varphi_E((k+1, k+2))^+$ für $k = 0, \dots, n-2$. Jedes D_k ist entweder V , U oder U^2 (Lemma 3.25). Es gilt

$$\varphi_E((k, k+1))^+ = \prod_{l=0}^{k-1} D_l, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

und mit $k = n-1$ insbesondere $A = \prod_{l=0}^{n-2} D_l$.

Sei $\psi : \{V, U, U^2\} \rightarrow \{v, u, u^2\}$ durch $\psi(V) = v$, $\psi(U) = u$ und $\psi(U^2) = u^2$ gegeben, dann war Ψ durch $\Psi(A) := \prod_{k=0}^{n-2} \psi(D_k)$ definiert worden.

Aus φ soll nun das eindeutig bestimmte reduzierte Wort zu $\Psi(A)$ konstruiert werden.

Sei angenommen, daß es ein $0 \leq k \leq n-3$ mit $D_k = D_{k+1} = V$ gäbe. Dann wäre

$$\varphi_E((k, k+1))^+ = \prod_{l=0}^{k-1} D_l = \left(\prod_{l=0}^{k-1} D_l \right) VV = \prod_{l=0}^{k+1} D_l = \varphi_E((k+2, k+3))^+$$

und damit φ_E nicht injektiv.

Sei angenommen, daß es ein $0 \leq k \leq n-3$ mit $D_k, D_{k+1} \in \{U, U^2\}$ gäbe. Wäre $D_k = U, D_{k+1} = U^2$, dann wäre

$$\varphi_E((k, k+1))^+ = \prod_{l=0}^{k-1} D_l = \left(\prod_{l=0}^{k-1} D_l \right) UU^2 = \prod_{l=0}^{k+1} D_l = \varphi_E((k+2, k+3))^+$$

und φ_E ebenfalls nicht injektiv. Ebenso kann nicht $D_k = U^2, D_{k+1} = U$ gelten.

Wäre $D_k = D_{k+1} = U$, dann wären alle drei Kanten $B := \varphi_E((k, k+1))^+ = \prod_{l=0}^{k-1} D_l$, $\varphi_E((k+1, k+2))^+ = BU$ und $\varphi_E((k+2, k+3))^+ = BU^2$ mit Endpunkt $[B]_3$ in $E_+(\varphi)$. Dies widerspräche der Folgerung aus Lemma 1.11, nach welcher in einem injektiven Pfad höchstens zwei Kanten mit demselben Endpunkt liegen. Analog folgte aus $D_k = D_{k+1} = U^2$, daß die Kanten B, BU^2 und $BU^4 = BU$ in $E(\varphi)$ lägen, was ebenfalls der Injektivität von φ widerspräche.

Also gilt, daß auf ein $D_k = V$ ein $D_{k+1} \in \{U, U^2\}$ folgt und umgekehrt. Dies bedeutet gerade, daß in der Folge $\omega'_k := \psi(D_{k-1}), k = 1, \dots, n-1$, sich v und u, u^2 abwechseln. Wird $n' = n-1$ und für alle $k = 1, \dots, n'$ das Folgenglied i'_k durch $i'_k = 2$, falls $\omega'_k = v$ ist, und $i'_k = 3$ sonst festgesetzt, dann ist (n', i', ω') ein reduziertes Wort und es gilt

$$\prod \omega' = \prod_{k=1}^{n'} \omega' = \prod_{k=1}^{n'} \psi(D_{k+1}) = \prod_{k=0}^{n-2} \psi(D_k) = \Psi \left(\prod_{k=0}^{n-2} D_k \right) = \Psi(A).$$

Eine unmittelbare Anwendung davon ist der folgende Satz:

Satz 3.39. *Mit den Bezeichnungen aus diesem Kapitel gilt*

$$D_L(I, A) = n - 1.$$

Beweis. Der Abstand $D_L(I, A)$ ist definiert als $d_L(\Phi^{-1}(I), \Phi^{-1}(A))$, welches als die Länge n' des eindeutig bestimmten reduzierten Wortes (n', i', ω') mit $\prod \omega' = \Phi^{-1}(A) = \Psi(A)$ festgelegt ist (siehe Seite 49). Wie gerade gesehen, gilt $n' = n - 1$. \square

Folgerung. *Sind $A, B \in \Gamma$, dann ist $D_L(A, B)$ gleich der Länge des injektiven Pfades in G^* mit A als erster und B als letzter Kante minus eins.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar daraus, daß Γ auf G^* von links durch Graphenautomorphismen operiert. \square

Eine weitere Anwendung soll gezeigt werden. Eine **Verkürzung** (n'', i'', ω'') des reduzierten Wortes (n', i', ω') , also $0 \leq n'' \leq n'$, $i''_k = i'_k$, $\omega''_k = \omega'_k$, $k = 1, \dots, n''$, ist erneut ein reduziertes Wort. Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

Proposition 3.40. *Sei (n'', i'', ω'') eine Verkürzung von (n', i', ω') , $0 \leq n'' \leq n'$. Dann ist (n'', i'', ω'') das reduzierte Wort zu $\Psi(\varphi_E((n'', n'' + 1))^+)$. Insbesondere ist jede Verkürzung von (n', i', ω') das reduzierte Wort zu einer Kante, die von φ besucht wird.*

Beweis. Dies folgt aus $\varphi_E((k, k + 1))^+ = \prod_{l=0}^{k-1} D_l$, $k = 1, \dots, n - 1$. □

Beispiel 3.41. Sei $k \geq 0$ ganz. Sei Ψ wie gehabt. Für die Kante $R^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ von G^* gilt $\Psi(R^k) = (u^2 v)^k$ und dieses hat nach Lemma 3.30 die Form eines reduzierten Wortes. Ist $0 \leq k' < k$, dann ist das Wort zu $(u^2 v)^{k'}$ eine Verkürzung des Wortes zu $(u^2 v)^k$. Im injektiven Pfad, der $[I]_2$ mit $[R^k]_2$ verbindet sind also die Kanten $R^{k'}$ und damit die Ecken $[R^{k'}]_2$ und $[R^{k'}]_3$ für alle $0 \leq k' < k$ enthalten.

3.6 Der euklidische Algorithmus und die Modulgruppe

Seien p und q positive, ganze Zahlen. Ist $p > q$, so werde q von p abgezogen. Ist $q > p$, so werde p von q abgezogen. Dieser Prozess werde wiederholt, bis die Zahlen gleich sind. Nach Euklid [Euk80, Buch VII, Par. 2] ist dieser Wert dann der größte gemeinsame Teiler von p und q . Dieses Verfahren ist der klassische additive **euklidische Algorithmus**.

Seien $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Wird L oder R auf $\frac{p}{q}$ angewendet, so ergibt dies

$$L \frac{p}{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{p}{q} = \frac{p}{p+q}$$

und

$$R \frac{p}{q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{p}{q} = \frac{p+q}{q}.$$

Die Linksmultiplikation mit L^{-1} und R^{-1} dagegen entspricht

$$L^{-1} \frac{p}{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{p}{q} = \frac{p}{-p+q}$$

und

$$R^{-1} \frac{p}{q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{p}{q} = \frac{p-q}{q}.$$

Der additive euklidische Algorithmus kann für $\frac{p}{q}$ also durch konditionale Linksmultiplikation mit L^{-1} oder R^{-1} durchgeführt werden. (Dies geht natürlich auch,

wenn p und q nicht teilerfremd sind). Dabei ergibt sich eine Folge $(E_k)_{k=1, \dots, n}$ der Länge n in $\{L^{-1}, R^{-1}\}$ mit

$$\prod_{k=1}^n E_k \frac{p}{q} = \frac{1}{1}.$$

Dabei ist n die Anzahl der Schritte, die der additive euklidische Algorithmus für $\frac{p}{q}$ zum Terminieren benötigt.

Sei $B = \prod_{k=1}^n E_k$. Da B^{-1} ein Produkt in L und R ist, gilt nach Lemma 3.37 $n+1 = N_L(B^{-1})$ und es gibt einen Vertreter $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ von B^{-1} mit $a, b, c, d \geq 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= B \frac{p}{q}, \\ B^{-1} \frac{1}{1} &= \frac{p}{q}, \end{aligned}$$

also $\frac{p}{q} = \frac{a+b}{c+d}$. Damit folgt $n+1 = N_L(B^{-1}) = N_L\left(\frac{|a+b|}{|c+d|}\right) = N_L\left(\frac{p}{q}\right)$. Also gilt:

Satz 3.42. $N_L\left(\frac{p}{q}\right) - 1$ ist gleich der Anzahl der Schritte, die der additive euklidische Algorithmus für $\frac{p}{q}$ zum Terminieren benötigt.

Vergleiche [GKP89, Sect. 4.5, Zweiter Algorithmus] und [Alp99].

Der Aufbau der Stern-Brocot-Brüche durch Mediantenbildung und die Reduktion von Brüchen durch den euklidischen Algorithmus sind also analoge Prozesse. Im ersten wird mit I begonnen und von rechts mit L und R multipliziert, im zweiten operieren dagegen L^{-1} und R^{-1} von links.

Neben dem Aufbau der rationalen Zahlen als Medianten sowie durch den euklidischen Algorithmus hat die Operation von R und L auch einen engen Zusammenhang mit der Darstellung einer rationalen Zahl als Kettenbruch. Dazu sei auf [GKP89, Sect. 6.7], [Vep04] oder [Ste58] verwiesen.

4 Die Operation der Modulgruppe auf G^*

4.1 Die Operation und ihre Fixpunkte

Zu einem $A \in \Gamma$ seien

- $A_V : V(G) = Q \rightarrow V(G)$ durch $\frac{p}{q} \mapsto A \frac{p}{q}, \frac{p}{q} \in Q$, und
- $A_{E_+} : E_+(G) = \Gamma \rightarrow E_+(G)$ durch $B \mapsto AB, B \in \Gamma$,

definiert.

Lemma 4.1. Für jedes $A \in \Gamma$ sind die Abbildungen A_V, A_{E_+} und o_G, t_G miteinander verträglich.

Beweis. Sei $\frac{p}{q}$ eine Ecke von G und $B \in E_+(G)$ eine Kante mit $o_G(B) = \frac{p}{q}$, das heißt $B = \begin{bmatrix} p & b' \\ q & d' \end{bmatrix}$ mit geeigneten $b', d' \in \mathbb{Z}$. Für jedes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$ ist dann $o_G(AB) = o_G\left(\begin{bmatrix} ap+bq & ab'+bd' \\ cp+dq & cb'+dd' \end{bmatrix}\right) = \frac{(ap+bq)}{(cp+dq)} = A\frac{p}{q}$. Die Verträglichkeit mit t_G folgt analog. \square

Mit Satz 1.4 folgt, daß A_{E_+} auf eindeutig bestimmte Weise zu $A_E : E(G) \rightarrow E(G)$ fortgesetzt werden kann, so daß $A = (A_V, A_E) : G \rightarrow G$ ein Homomorphismus ist.

Da durch A^{-1} eine Umkehrabbildung gegeben ist, ist $A : G \rightarrow G$ bijektiv und damit ein Graphenautomorphismus. Dieser ist wegen $A_E(E_+(G)) = A\Gamma = \Gamma = E_+(G)$ orientierungserhaltend. Es folgt:

Satz 4.2. Die Modulgruppe operiert auf G durch orientierungserhaltende Graphenautomorphismen.

Bemerkung 4.3. Der Stabilisator einer beliebigen Kante besteht nur aus dem Einselement I . Insbesondere ist der Stabilisator des ganzen Graphen trivial.

Lemma 4.4. Seien $A, B \in \Gamma$. Das Bild von $[B]_2$ unter A ist ein 2-Zykel. Das Bild von $[B]_3$ unter A ist ein stabiler 3-Zykel. Es gilt $B[A]_2 = [BA]_2$ und $B[A]_3 = [BA]_3$.

Beweis. Da A ein Automorphismus ist, sind $A[B]_2$ und $A[B]_3$ ebenfalls 2- beziehungsweise 3-Zykel. Die Kanten aus $A[B]_3$ sind AB, ABU und ABU^2 sowie ihre Umgekehrten. Dies sind genau die sechs Kanten im stabilen 3-Zykel $[AB]_3$. Da zwei verschiedene stabile 3-Zykel wegen Proposition 3.9 disjunkte Kantenmengen besitzen, gilt $A[B]_3 = [AB]_3$. Die Kanten des 2-Zykels $A[B]_2$ sind AB, ABV und ihre Umgekehrten, also die Kanten von $[AB]_2$. Da zwei verschiedene 2-Zykel nach Proposition 3.6 disjunkte Kantenmengen besitzen, folgt $A[B]_2 = [AB]_2$. \square

Zu einem $A \in \Gamma$ seien

- $A_V^* : V(G^*) = K_2 \dot{\cup} K_3 \rightarrow V(G^*)$ durch $[B]_2 \mapsto [AB]_2, [B]_3 \mapsto [AB]_3, B \in \Gamma$, und
- $A_{E_+}^* : E_+(G^*) = \Gamma \rightarrow E_+(G^*)$ durch $B \mapsto AB, B \in \Gamma$,

gegeben.

Lemma 4.5. Für jedes $A \in \Gamma$ sind die Abbildungen $A_V^*, A_{E_+}^*$ und o_{G^*}, t_{G^*} miteinander verträglich.

Beweis. Sei $B \in \Gamma$. Es gilt

$$o_{G^*}(BA) = [BA]_2 = B[A]_2 = B o_{G^*}(A)$$

und

$$t_{G^*}(BA) = [BA]_3 = B[A]_3 = B t_{G^*}(A).$$

□

Mit Satz 1.4 läßt sich $A_{E_+}^*$ auf eindeutige Weise zu A_E^* fortsetzen, so daß $(A_V^*, A_E^*) : G^* \rightarrow G^*$ ein Homomorphismus ist, welcher ebenfalls mit A bezeichnet werde. Dieser ist, da A^{-1} eine Umkehrabbildung ist, bijektiv und damit ein Graphenautomorphismus. Wegen $AE_+(G^*) = A\Gamma = \Gamma = E_+(G^*)$ ist A orientierungserhaltend. Es folgt:

Satz 4.6. Die Modulgruppe Γ operiert auf G^* durch orientierungserhaltende Graphenautomorphismen.

Bemerkung 4.7. Auch in G^* ist der Stabilisator jeder Kante in Γ trivial.

Proposition 4.8. Ist $A \in \Gamma$ ein zu V , U oder U^2 konjugiertes Element, dann hat A einen Fixpunkt in $V(G^*)$.

Beweis. Ist $A = BVB^{-1}$ für ein $B \in \Gamma$, dann ist

$$A[B]_2 = BVB^{-1}[B]_2 = [BVB^{-1}B]_2 = [BV]_2 = [B]_2.$$

Damit hat A den Fixpunkt $[B]_2$. Ist $A = BU^k B^{-1}$, $k = 1, 2$ für ein $B \in \Gamma$, dann ist

$$A[B]_3 = BU^k B^{-1}[B]_3 = [BU^k B^{-1}B]_3 = [BU^k]_3 = [B]_3$$

und somit $[B]_3$ ein Fixpunkt von A . □

Proposition 4.9. Seien $A, B \in \Gamma$, $A \neq I$, mit $A[B]_2 = [B]_2$. Dann gilt $A = BVB^{-1}$. Die zwei Kanten in G^* mit Anfangspunkt $[B]_2$ werden unter A vertauscht.

Beweis. Es gilt $[AB]_2 = [B]_2$, also $\{AB, ABV\} = \{B, BV\}$. Da $A \neq I$ ist, muß $AB = BV$ gelten und es folgt $A = BVB^{-1}$. Weiter gilt $ABV = BVB^{-1}BV = B$, das heißt die Kanten mit Anfangspunkt $[B]_2$, nämlich B und BV , werden unter A vertauscht. □

Proposition 4.10. Seien $A, B \in \Gamma$, $A \neq I$, mit $A[B]_3 = [B]_3$. Dann gilt $A = BUB^{-1}$ oder $A = BU^2 B^{-1}$. Die drei Kanten von G^* , deren Endpunkt $[B]_3$ ist, werden unter A in nicht-trivialer, zyklischer Weise permutiert.

Beweis. Wegen $[AB]_3 = [B]_3$ gilt $\{AB, ABU, ABU^2\} = \{B, BU, BU^2\}$. Da $A \neq I$ ist, gilt also $AB = BU$ oder $AB = BU^2$ und damit $A = BUB^{-1}$ oder $A = BU^2B^{-1}$.

Fall I. $A = BUB^{-1}$. Die drei Kanten B , BU und BU^2 mit Endpunkt $[B]_3$ werden unter A in $BUB^{-1}B = BU$, $BUB^{-1}BU = BU^2$ respektive $BUB^{-1}BU^2 = B$ abgebildet.

Fall II. $A = BU^2B^{-1}$. Die Kanten B , BU und BU^2 werden unter A in $BU^2B^{-1}B = BU^2$, $BU^2B^{-1}BU = B$ respektive $BU^2B^{-1}BU^2 = BU$ abgebildet. \square

Proposition 4.11. *Besitzt $A \in \Gamma$ einen Fixpunkt in $V(G^*)$, dann gilt $A = I$ oder A ist konjugiert zu einem Element aus $\{V, U, U^2\}$. Die Ordnung des Elements A ist also 1, 2 oder 3.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Propositionen 4.9 und 4.10. \square

Proposition 4.12. *Ist $A \in \Gamma$, $A \neq I$, ein Element endlicher Ordnung, dann ist A zu V , U oder U^2 konjugiert.*

Beweis. Der Beweis erfolge in $C_2 * C_3$ mit den üblichen Bezeichnungen.

Sei $\alpha \in C_2 * C_3$ ein Element der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Von allen Konjugierten zu α sei β so, daß das reduzierte Wort (n, i, ω) zu β minimale Länge n hat. Ist $n = 1$, dann ist $\beta \in \{v, u, u^2\}$ und damit α zu einem dieser Elemente konjugiert. Sei also $n > 1$ angenommen.

Fall I. $i_1 = i_n$. Das reduzierte Wort zu $\omega_1^{-1}\beta\omega_1$ hat Länge $n - 2$, falls $\omega_n = \omega_1^{-1}$ gilt, und Länge $n - 1$ sonst. Es ist zu β und damit zu α konjugiert. Dies widerspricht der Minimalität der Länge von (n, i, ω) .

Fall II. $i_1 \neq i_n$. Dann hat das reduzierte Wort zu β^2 die Länge $2n$. Nach Induktion hat das reduzierte Wort zu β^k , $k \in \mathbb{N}$, damit die Länge kn . Es gilt $\beta^m = \alpha^m = e$, also $mn = 0$, was $n, m \geq 1$ widerspricht. \square

Diese Ergebnisse sollen zu einem Satz zusammengefasst werden:

Satz 4.13. *Sei $A \in \Gamma$, $A \neq I$. Äquivalent sind:*

- (1) *A hat endliche Ordnung.*
- (2) *A hat einen Fixpunkt in G^* .*
- (3) *A ist zu V , U oder U^2 konjugiert.*

Beweis. (1) \Rightarrow (3) folgt aus Proposition 4.12.

(3) \Rightarrow (2) folgt aus Proposition 4.8.

(2) \Rightarrow (3), (1) folgt aus Proposition 4.11. \square

Zu (1) \Leftrightarrow (3) in Satz 4.13 vergleiche [Ser80, Chap. I, Par. 1.3, Cor. 1] und [New72, Theorem VIII.4].

4.2 Die obere Halbebene und der Serre'sche Graph

Die Modulgruppe Γ operiert auf der komplexen oberen Halbebene

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

durch

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}, z \in H.$$

Dabei besitzen die Punkte i und $\rho := e^{\frac{i\pi}{3}}$ die Stabilisatoren $\langle V \rangle = \{I, V\}$ respektive $\langle U \rangle = \{I, U, U^2\}$. Ein Fundamentalbereich zur Operation von Γ auf H ist durch

$$F := \left\{ z \in H \mid \frac{-1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq 0, |z| \geq 1 \right\} \cup \left\{ z \in H \mid 0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\}$$

gegeben. Die Vereinigung

$$H = \bigcup_{A \in \Gamma} AF$$

ist disjunkt bis auf die Punkte Ai , die doppelt und die Punkte $A\rho$, die dreifach vorkommen: Ist $Ai = A'i$, dann ist $A^{-1}A'$ aus dem Stabilisator von i , also $\{I, V\}$. Ist $A\rho = A'\rho$, dann ist $A^{-1}A'$ aus dem Stabilisator von ρ , also $\{I, U, U^2\}$. Zusätzlich ist $Ai \neq A'\rho$ für alle $A, A' \in \Gamma$. Für den Beweis dieser Behauptungen sei auf [Shi71, Par. 1.4] verwiesen.

Definition. Ein **topologischer Graph** ist ein Graph, dessen Ecken Punkte in einem topologischen Raum und dessen Kanten Jordankurven (also Einbettungen des Einheitsintervalls) darin sind, die solche Ecken verbinden. Diese Definition folgt [Wag70], wird hier allerdings leicht abgeändert, um mit Serres Graphentheorie kompatibel zu sein: Ist φ eine Kante eines topologischen Graphen, dann gelte $\bar{\varphi}(t) = \varphi(1-t)$, $t \in [0, 1]$. Ist ψ eine von φ und $\bar{\varphi}$ verschiedene Kante, dann gelte $\varphi(t) \neq \psi(s)$ für alle $t, s \in]0, 1[$.

Der topologische Graph G_s in der oberen komplexen Halbebene sei erklärt durch

$$V(G_s) = \{Ai \mid A \in \Gamma\} \dot{\cup} \{A\rho \mid A \in \Gamma\}$$

und

$$E_+(G_s) = \{A\varphi \mid A \in \Gamma\},$$

wobei φ ein Kreisbogensegment mit Mittelpunkt 0 ist, das i mit ρ verbindet, also etwa

$$\varphi(t) = e^{\frac{i\pi}{2} - \frac{i\pi t}{6}}, t \in [0, 1].$$

Da $A\varphi(t) \neq A'\varphi(s)$ für alle $A, A' \in \Gamma$, $A \neq A'$, und $s, t \in]0, 1[$ gilt, schneiden sich zwei verschiedene Kanten aus $E_+(G_s)$ höchstens in ihren Anfangs- und Endpunkten.

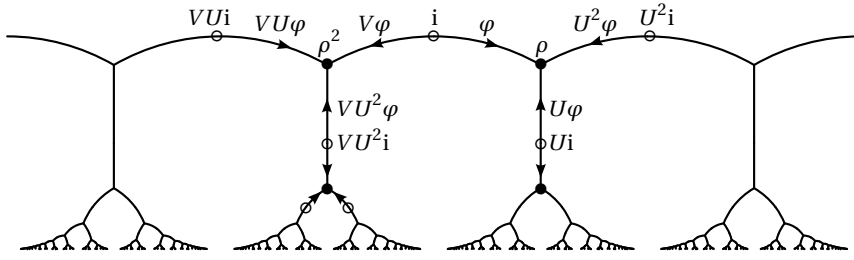


Abbildung I: Der Serre'sche Graph

Dieser Graph (Abbildung I) ist bei Serre [Ser, Chap. I, Par. 4.2, (c)] zu finden und dient dort dem Beweis, daß die Modulgruppe das freie Produkt von $\langle V \rangle$ und $\langle U \rangle$ ist. Es soll gezeigt werden, daß dieser Graph isomorph zu G^* ist und daß die Operation von Γ auf diesem Graphen als Teilmenge der oberen Halbebene mit der Operation auf G^* übereinstimmt.

Die Abbildung $\Theta_{E_+} : E_+(G^*) \rightarrow E_+(G_s)$ sei gegeben durch $\Theta_{E_+}(B)(t) = B\varphi(t)$, $B \in E_+(G^*)$. Die Eckenabbildung $\Theta_V : V(G^*) \rightarrow V(G_s)$ auf $K_2 \dot{\cup} K_3$ sei definiert durch

$$\Theta_V([B]_2) = Bi, \quad \Theta_V([B]_3) = B\rho, \quad B \in \Gamma.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn für einen 2-Zykel $[B]_2$ sind die Kanten aus $E_+([B]_2)$ gerade B und BV und es gilt $i = Vi$. Für einen 3-Zykel $[B]_3 \in K_3$ sind die Kanten aus $E_+([B]_3)$ gerade B , BU und BU^2 und es gilt $\rho = U\rho = U^2\rho$.

Ist B aus $E_+(G^*)$, dann ist

$$o_{G_s}(\Theta_{E_+}(B)) = Bi = \Theta_V(o_{G^*}(B))$$

und

$$t_{G_s}(\Theta_{E_+}(B)) = B\rho = \Theta_V(t_{G^*}(B)).$$

Nach Satz 1.4 läßt sich Θ_{E_+} auf eindeutige Weise so zu $\Theta_E : E(G) \rightarrow E(G_s)$ fortsetzen, daß $\Theta := (\Theta_V, \Theta_E)$ ein Homomorphismus ist.

Nach Konstruktion sind Θ_V und Θ_E surjektiv. Weil für alle $A, A' \in \Gamma$, $A \neq A'$,

- $Ai = A'i \Leftrightarrow A^{-1}A' \in \{I, V\}$,
- $A\rho = A'\rho \Leftrightarrow A^{-1}A' \in \{I, U, U^2\}$ und
- $Ai \neq A'\rho$

gilt, ist Θ_V injektiv. Wie bereits bemerkt folgt aus $A\varphi(t) = A'\varphi(t')$ für $A, A' \in \Gamma$, $t, t' \in]0, 1[$, daß $A = A'$ gilt, also ist Θ_{E_+} und damit auch Θ_E injektiv. Es folgt: Θ ist ein Graphenisomorphismus.

Proposition 4.14. *Der Isomorphismus Θ ist mit den Operationen von Γ auf G^* und auf H verträglich.*

Beweis. Sei $A \in \Gamma$ beliebig und $B \in E_+(G^*)$, dann ist

$$\Theta_V(A[B]_2) = ABi = A\Theta_V([B]_2)$$

und

$$\Theta_V(A[B]_3) = AB\rho = A\Theta_V([B]_3).$$

Ebenso ist

$$\Theta_{E_+}(AB)(t) = (AB)\varphi(t) = A(B\varphi(t)) = A\Theta_{E_+}(B)(t).$$

□

Teil II

Untergruppen der Modulgruppe

5 Spezielle Fundamentalbereiche

5.1 Fundamentalbereiche

Jede Untergruppe Λ der Modulgruppe operiert auf G^* durch Einschränkung der Operation von Γ . Ein **Fundamentalbereich** der Operation von Λ auf G^* ist erklärt als ein Subgraph $F \subset G^*$, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

(FUN1) F ist zusammenhängend.

(FUN2) Die Vereinigung der Λ -Bilder von F ist ganz G^* :

$$\Lambda F = \bigcup_{A \in \Lambda} AF = G^*.$$

(FUN3) Für $A \in \Lambda$, $A \neq I$, ist der Durchschnitt $AE(F) \cap E(F)$ leer.

Fundamentalbereiche in G^* sind das Gegenstück zu den gleichnamigen Gebieten in der komplexen oberen Halbebene (vergleiche [Shi71, Par. 1.4]). Beides sind zusammenhängende Teilmengen des zugrundeliegenden Raumes, die unter der Operation der Untergruppe diesen parkettieren.

Zu koendlichen Untergruppen lassen sich Fundamentalbereiche mit einem einfachen Algorithmus berechnen. Das Transformationsverhalten des Fundamentalbereiches unter der Untergruppe erlaubt die Berechnung eines Erzeugersystems, welches im allgemeinen jedoch nicht unabhängig ist. Vergleiche [KF90].

Sei im folgenden stets Λ eine beliebige Untergruppe von Γ .

Bemerkung 5.1. Für $\Lambda = \Gamma$ ist F mit $V(F) = \{[I]_2, [I]_3\}$ und $E_+(F) = \{I\}$ ein Fundamentalbereich.

Bemerkung 5.2. Ein Fundamentalbereich F zu Λ ist endlich genau dann, wenn Λ endlichen Index μ in Γ hat. Dann gilt $\mu = \#E_+(F)$.

Beweis. Sei zuerst F endlich. Wegen (FUN2) gilt $\Lambda E_+(F) = E_+(G^*) = \Gamma$. Also muß der Index von Λ in Γ kleiner oder gleich $\#E_+(F)$ sein.

Sei umgekehrt der Index μ von Λ in Γ endlich. Sind A und B zwei verschiedene Kanten aus $E_+(F) \subset \Gamma$, dann liegen sie wegen Bedingung (FUN3) nicht in derselben Rechtsnebenklasse von Γ unter Λ . Also ist die Anzahl der Kanten in $E_+(F)$ kleiner oder gleich μ . \square

Proposition 5.3. Sei F ein Fundamentalbereich für die Operation der Untergruppe $\Lambda \subset \Gamma$. Der Durchschnitt $AF \cap F$ besteht für $A \in \Lambda$, $A \neq I$, aus höchstens einer Ecke.

Beweis. Sei angenommen, daß zwei verschiedene Ecken a und b existieren, die beide sowohl in F als auch in AF liegen. Die Graphen F und AF sind als zusammenhängende Subgraphen eines Baumes selbst Bäume. Nach Proposition 1.15 gibt es also injektive Pfade φ_F und φ_{AF} in F beziehungsweise AF , die diese Ecken verbinden.

Eingebettet in G^* werden φ_F und φ_{AF} zu injektiven Pfaden, die a und b verbinden. Im Baum G^* gibt es nach Proposition 1.15 genau einen solchen Pfad, also sind φ_F und φ_{AF} identisch. Wegen $a \neq b$ gibt es in beiden Pfaden mindestens eine Kante, also haben F und AF eine Kante gemein, was (FUN3) widerspricht. \square

Definition. Der Subgraph von G^* , der nur aus einer Ecke $a \in V(G^*)$ besteht, werde zur Vereinfachung der Notation mit $\{a\}$ bezeichnet.

Definition. Die **Valenz** $v(a)$ einer Ecke a in einem Graphen G ist die Anzahl der Kanten $y \in E(G)$, deren Anfangspunkt $o(y) = a$ ist. Eine Ecke der Valenz 1 heißt **terminal**; eine Ecke der Valenz 0 heißt **isoliert**.

Bemerkung 5.4. Die Valenz jeder Ecke eines zusammenhängenden Graphen ist mindestens eins.

Bemerkung 5.5. Ecken aus K_2 haben Valenz 2, Ecken aus K_3 Valenz 3 in G^* .

Definition. Es sei \mathfrak{F} die Menge aller Subgraphen $F \subset G^*$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (SPF1) F ist zusammenhängend.
- (SPF2) $E(F)$ enthält die Kante I .
- (SPF3) Ecken aus $K_3 \cap V(F)$ haben Valenz ungleich 2 in F .

Die Bedingung (SPF3) bedeutet, daß Ecken aus K_3 entweder volle Valenz (also drei) haben oder terminal sind.

Satz 5.6. Zu jeder Untergruppe Λ von Γ gibt es einen Fundamentalbereich F , der in \mathfrak{F} liegt und die folgende Eigenschaft erfüllt:

- (*) Ist eine Ecke $\tau \in K_3 \cap V(F)$ terminal in F und ist $A \in \Lambda$ mit $A\tau \in V(F)$, dann gilt $A\tau = \tau$.

Ein solcher Fundamentalbereich soll **spezieller** Fundamentalbereich heißen.

Beweis. Sei $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ die Menge aller $F \in \mathfrak{F}$, die die Eigenschaften (FUN3) und $(*)$ erfüllen. Auf \mathfrak{F}' ist eine partielle Ordnung durch $F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow F_1 \subset F_2$, $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}'$, gegeben.

Der Graph, der nur die Kante I sowie die Ecken $[I]_2$ und $[I]_3$ enthält, liegt sicher in \mathfrak{F} und erfüllt (FUN3). Er erfüllt die Eigenschaft $(*)$, da $[I]_3$ die einzige Ecke aus K_3 in diesem Graphen ist. Also ist \mathfrak{F}' nicht leer.

Behauptung: In \mathfrak{F}' existieren maximale Elemente.

Beweis der Behauptung. Sei $\{F_x\}_{x \in X}$ mit Indexmenge X eine vollständig geordnete Teilmenge von \mathfrak{F}' und $F := \bigcup_{x \in X} F_x$. Es soll gezeigt werden, daß F in \mathfrak{F}' enthalten ist.

- Zu zwei Ecken a und b von F gibt es $x_a \in X$ und $x_b \in X$ mit $a \in V(F_{x_a})$ und $b \in V(F_{x_b})$. Es gilt $F_{x_a} \geq F_{x_b}$ oder $F_{x_a} \leq F_{x_b}$. Im größeren sind a und b enthalten und durch einen Pfad verbunden, der sie auch in F verbindet. Also ist F zusammenhängend, (SPF1).
- Jedes F_x enthält I , also ist dies auch in F enthalten, (SPF2).
- Hätte $\tau \in K_3 \cap V(F)$ Valenz 2 in F , dann gäbe es ein $x \in X$, so daß τ in F_x Valenz 2 hätte. Widerspruch. Also erfüllt F auch (SPF3).
- Gäbe es $\tau_1, \tau_2 \in K_3 \cap V(F)$, $\tau_1 \neq \tau_2$, und ein $A \in \Lambda$ mit $A\tau_1 = \tau_2$, dann gäbe es ein $x \in X$, so daß τ_1 und τ_2 in $V(F_x)$ enthalten sind. Da F_x die Eigenschaft $(*)$ erfüllt, folgte $\tau_1 = \tau_2$. Widerspruch. Also erfüllt F die Eigenschaft $(*)$.
- Existierten schließlich $A \in \Lambda$, $A \neq I$, und $y \in E(G^*)$ mit $y \in E(F) \cap AE(F)$, dann gäbe es ein $x \in X$ mit $y \in E(F_x)$ und $A^{-1}y \in E(F_x)$. Daraus folgte $y \in E(F_x) \cap AE(F_x)$. Dem widerspricht, daß F_x (FUN3) erfüllt. Damit folgt auch für F (FUN3).

Also ist $F \in \mathfrak{F}'$ eine obere Schranke zur Kette $\{F_x\}_{x \in X}$. Mit dem Lemma von Zorn folgt die Existenz maximaler Elemente in \mathfrak{F}' .

Sei jetzt F in \mathfrak{F}' ein maximales Element. Dieses erfüllt an Bedingungen für Fundamentalbereiche bereits (FUN1) und (FUN3). Es bleibt zu zeigen, daß F auch (FUN2) erfüllt, also daß ΛF ganz G^* ist. Dazu sei angenommen, daß ΛF nicht ganz G^* ist.

Gibt es Ecken von G^* , die nicht in $\Lambda V(F)$ liegen, dann kann keine Kante aus $E_+(G^*)$, die eine solche Ecke als Anfangs- oder Endpunkt hat, in $\Lambda E_+(F)$ enthalten sein. Umgekehrt folgt aus $\Lambda E_+(F) = E_+(G^*)$ unmittelbar $\Lambda V(F) = V(G^*)$. Die Annahme, daß ΛF nicht ganz G^* ist, ist also äquivalent dazu, daß $\Lambda E_+(F) \neq E_+(G^*)$ ist.

Sei A_1 eine Kante aus $E_+(G^*)$, die nicht in ΛF enthalten ist. Sei φ der injektive Pfad in G^* mit I als erster und A_1 als letzter Kante (Proposition 1.17). Dann gibt

es ein kleinstes $i > 0$, so daß $A' := \varphi_E((i, i+1))^+$ nicht in ΛF enthalten ist. Da $\varphi_E((i-1, i))^+$ in ΛF liegt und $t((i-1, i)) = o((i, i+1))$ gilt, ist A' eine Kante, die nicht in ΛF liegt, aber Anfangs- oder Endpunkt darin hat. Sei also $B \in \Lambda$ so, daß $[A']_2$ oder $[A']_3$ in BF enthalten ist.

Die Kante $A := B^{-1}A'$ kann nicht in ΛF enthalten sein, aber mindestens eine der Ecken $\delta := B^{-1}[A']_2 = [A]_2$ und $\tau := B^{-1}[A']_3 = [A]_3$ liegen in F . Wir halten fest:

Feststellung (A): Es gibt eine Kante $A \notin \Lambda F$ mit Anfangs- und Endpunkten $\delta = o(A)$ und $\tau = t(A)$, von denen mindestens einer in $V(F)$ liegt.

Im weiteren werden A_1 , A' und B nicht mehr benötigt, die Bezeichnungen seien also wieder freigegeben.

Die folgenden Fälle werden unterschieden:

Fall I. δ und τ sind beide in $V(F)$ enthalten. Als zusammenhängender Subgraph eines Baumes ist F selbst ein Baum. Der injektive Pfad, der δ und τ in F verbindet, enthält die Kanten A und \bar{A} . Also ist A in $F \subset \Lambda F$. Widerspruch zu (A).

Fall II. Nur der Endpunkt τ von A liegt in $V(F)$. In G^* gibt es genau drei Kanten y mit $t(y) = \tau = [A]_3$, nämlich A , AU und AU^2 . Da τ in F Valenz 1 oder 3 hat (SPF3) und A nicht in F ist, liegt von den Kanten AU und AU^2 genau eine, entweder AU (Fall II.1) oder AU^2 (Fall II.2), in F .

Der Graph F' sei definiert durch Hinzufügen der Kanten A , AU , AU^2 (sowie ihrer Anfangspunkte und ihrer Umgekehrten) zu F . Er ist sicher echt größer als F . Es soll gezeigt werden, daß F' in \mathfrak{F}' liegt.

- F' ist zusammenhängend, da F zusammenhängend ist und jede der neu hinzugefügten Kanten eine Ecke in F hat. Also gilt (SPF1).
- Die Kante I liegt in $F \subset F'$, (SPF2).
- Die Ecke τ hat Valenz 3 in F' . Jede andere Ecke aus K_3 hat in F' dieselbe Valenz wie in F , also 1 oder 3, (SPF3).
- F' erfüllt (FUN3): Dazu sei B aus Λ , $B \neq I$. Sei zuerst angenommen, daß $B\{A, AU, AU^2\} \cap \{A, AU, AU^2\}$ nicht leer ist.

Fall II.1. AU ist die Kante, die bereits in F liegt. Gilt $BAU = A$, dann ist $A \in BF$. Gilt $BAU = AU^2$, dann ist $BBAU = BAU^2 = BAUU = AU^3 = A$ und es gilt $A \in B^2F$.

Fall II.2. AU^2 ist die Kante, die bereits in F liegt. Gilt $BAU^2 = A$, dann ist $A \in BF$. Gilt $BAU^2 = AU$, dann ist $BBAU^2 = BAU = BAUU^3 = BAU^2U^2 = AUU^2 = A$ und es gilt $A \in B^2F$.

In beiden Fällen läge A in ΛF , was (A) widerspräche.

Sei nun angenommen, daß $B\{A, AU, AU^2\} \cap E_+(F)$ nicht leer ist. Da F die Eigenschaft $(*)$ erfüllt, muß B die Ecke τ auf sich selbst abbilden. Daraus folgt $B\{A, AU, AU^2\} = \{A, AU, AU^2\}$, was bereits widerlegt wurde.

Sei schließlich angenommen, daß $BE_+(F) \cap \{A, AU, AU^2\}$ nicht leer ist, dann wäre $B^{-1}\{A, AU, AU^2\} \cap E_+(F)$ nicht leer, was gerade widerlegt wurde.

Da F (FUN3) erfüllt, gilt $BE_+(F) \cap E_+(F) = \emptyset$. Also ist

$$\begin{aligned}
BE_+(F') \cap E_+(F') &= B(E_+(F) \cup \{A, AU, AU^2\}) \cap (E_+(F) \cup \{A, AU, AU^2\}) \\
&= (BE_+(F) \cap E_+(F)) \\
&\quad \cup (B\{A, AU, AU^2\} \cap E_+(F)) \\
&\quad \cup (BE_+(F) \cap \{A, AU, AU^2\}) \\
&\quad \cup (B\{A, AU, AU^2\} \cap \{A, AU, AU^2\}) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Da Γ orientierungserhaltend auf G^* operiert (Satz 4.6), gilt $BE(F') \cap E(F') = (BE_+(F') \cap E_+(F')) \dot{\cup} \overline{(BE_+(F') \cap E_+(F'))} = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

- Es ist $V(F') \cap K_3 = V(F) \cap K_3$. Sei $\bar{\tau} \in K_3$ eine Ecke mit Valenz 1 in F' , dann hat $\bar{\tau}$ bereits in F Valenz 1. Gibt es nun ein $B \in \Lambda$ mit $B\bar{\tau} \in V(F')$, dann ist $B\bar{\tau} = \bar{\tau}$, da F die Eigenschaft $(*)$ erfüllt. Also erfüllt F' ebenfalls die Eigenschaft $(*)$.

Somit erfüllt F' jede Bedingung für Elemente aus \mathfrak{F}' und ist echt größer als F , was dessen Maximalität widerspricht.

Fall III.1. Nur der Anfangspunkt δ von A liegt in $V(F)$ und $\Lambda\{\tau\} \cap V(F)$ ist leer. Dann sei F' der Subgraph von G^* , der durch Hinzufügen der Ecke τ und der Kanten A, \bar{A} zu F entsteht. Es gilt:

- F' ist zusammenhängend, da F zusammenhängend ist und τ über A mit $\delta \in V(F)$ verbunden ist, (SPF1).
- Es ist $I \in F \subset F'$, (SPF2).
- Die Ecke τ hat Valenz 1 in F' . Jede andere Ecke aus K_3 hat in F' dieselbe Valenz wie in F , also 1 oder 3, (SPF3).
- F' erfüllt (FUN3): Sei $B \in \Lambda$, $B \neq I$. Da A nach Annahme nicht in ΛF liegt, kann A auch nicht in BF liegen. Ebenso kann BA nicht in F liegen, da sonst A in $B^{-1}F$ läge.

Es folgt

$$\begin{aligned}
E_+(F') \cap BE_+(F') &= (E_+(F) \cup \{A\}) \cap B(E_+(F) \cup \{A\}) \\
&= (E_+(F) \cap BE_+(F)) \\
&\quad \cup (E_+(F) \cap B\{A\}) \\
&\quad \cup (\{A\} \cap BE_+(F)) \\
&\quad \cup (\{A\} \cap B\{A\}) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.
\end{aligned}$$

Da Γ orientierungserhaltend operiert (Proposition 4.6), ist also keine Kante im Durchschnitt von F' und BF' enthalten.

- Nach Voraussetzung ist $\Lambda\{\tau\} \cap V(F)$ leer, also ist $\Lambda\{\tau\} \cap V(F') = \{\tau\}$. Ebenfalls wegen dieser Voraussetzung wird keine terminale Ecke aus $K_3 \cap V(F)$ unter Λ in τ abgebildet. Da F bereits die Eigenschaft (*) erfüllt und $V(F') \cap K_3 = (V(F) \cap K_3) \cup \{\tau\}$ gilt, erfüllt auch F' die Eigenschaft (*).

F' erfüllt also jede Bedingung für Elemente aus \mathfrak{F}' und ist echt größer als F . Dies widerspricht der Maximalität von F .

Fall III.2. Nur der Anfangspunkt δ von A liegt in $V(F)$ und $\Lambda\{\tau\} \cap V(F)$ ist nicht leer. Sei $B \in \Lambda$, so daß $\tau' := B\tau$ in F liegt. Dann ist $\tau' = t(BA)$ in F , aber BA nicht in $\Lambda E_+(F)$, also gilt für die Kante BA Fall I oder Fall II.

In allen Fällen führt die Annahme, daß ΛF nicht ganz G^* ist zum Widerspruch. Also erfüllt F auch die Bedingung (FUN2) und ist damit ein Fundamentalbereich für die Operation von Λ auf G^* , der in \mathfrak{F} enthalten ist und die Eigenschaft (*) erfüllt – ein spezieller Fundamentalbereich. \square

5.2 Seitenpaarungen

Im folgenden sei stets F ein spezieller Fundamentalbereich zur Operation der Untergruppe Λ auf G^* .

Lemma 5.7. *Jede Ecke, die für ein $A \in \Lambda$, $A \neq I$, in $AF \cap F$ liegt, hat Valenz 1 in F .*

Beweis. Die Valenz von Ecken aus K_2 in G^* ist 1 oder 2, die von Ecken aus K_3 ist 1 oder 3 wegen (SPF3).

Sei $x \in V(AF \cap F)$. Nach Proposition 5.3 liegt in $AF \cap F$ höchstens eine Ecke. Also ist $AF \cap F = \{x\}$.

Fall I. $x \in K_2$, also $x = [B]_2$ für ein geeignetes $B \in \Gamma$. Hätte $[B]_2$ Valenz 2 in F , dann wären B und BV in F enthalten. Dann hätte $[B]_2 \in V(AF)$ wegen (FUN3) Valenz 0 in AF . Aber AF ist zusammenhängend und enthält Kanten, also kann $[B]_2$ in AF nicht isoliert sein. Somit hat $x = [B]_2$ Valenz 1 in F .

Fall II. $x \in K_3$, also $x = [B]_3$ für ein geeignetes $B \in \Gamma$. Hätte $[B]_3$ Valenz 3 in F , dann wären B , BU und BU^2 in F . Wegen (FUN3) hätte $[B]_3$ Valenz 0 in AF , was wie gerade gesehen nicht sein kann. Also hat $x = [B]_3$ Valenz 1 in F . \square

Definition. Die Menge

$$S := \left\{ A \in \Lambda \mid A \neq I, AF \cap F \neq \emptyset \right\}$$

heißt **Seitenpaarung** zum Fundamentalbereich F .

Bemerkung 5.8. *Hat Λ endlichen Index in Γ , dann ist die Seitenpaarung S eine endliche Menge.*

Beweis. Sei Y die Menge der Kanten aus $E_+(G^*)$ mit Anfangs- oder Endpunkt in $V(F)$. Wegen Bemerkung 5.2 ist F endlich. Jede Ecke von G^* hat endliche Valenz, also ist Y endlich. Ist $AF \cap F$ nicht leer für ein $A \in \Lambda$, dann gibt es ein $B \in E_+(F)$ mit $AB \in Y$, also $A \in YB^{-1}$. Somit folgt $S \subset YE_+(F)^{-1}$. Da Y und $E_+(F)$ endlich sind, ist S als Teilmenge eines Produkts endlicher Mengen ebenfalls endlich. \square

Proposition 5.9. *Hat $A \in \Lambda$ einen Fixpunkt, der nicht in F liegt, also $Ax = x$ für ein $x \in V(G^*) \setminus V(F)$, dann ist A nicht in der Seitenpaarung S enthalten.*

Beweis. Ist $A = I$, dann ist A nach Definition nicht in S .

Fall I. $x = \delta$ für ein $\delta \in K_2$. Da δ nicht in F liegt, ist auch keine der Kanten von G^* mit Anfangs- oder Endpunkt δ in F . Seien τ_1 und τ_2 die zwei Ecken aus K_3 , die in G^* zu δ benachbart sind (Lemma 3.19). Sei $G' := G^* \setminus \{\delta\}$, das heißt der Subgraph von G^* , aus dem δ und alle Kanten mit δ als Anfangs- oder Endpunkt entfernt wurden (siehe Kapitel 1.1). Sei $a \in V(G^*)$ ungleich δ und sei φ der eindeutig bestimmte injektive Pfad in G^* , der δ mit a verbindet (Proposition 1.15). Dann ist $\varphi_V(1)$ entweder τ_1 oder τ_2 . Da φ injektiv ist, gilt $\varphi_V(i) \neq \delta$ für $i > 0$. Der Teilpfad $\varphi|_{[1,n]}$ (wobei n die Länge von φ ist) verbindet τ_1 oder τ_2 mit a und liegt ganz in G' . Also ist jede Ecke von G' mit τ_1 oder τ_2 verbunden.

Wären τ_1 und τ_2 in G' verbunden, dann gäbe es nach Proposition 1.9 einen injektiven Pfad in G' , der sie verbände. Dieser würde in G^* ebenfalls τ_1 und τ_2 verbinden. Der eindeutig bestimmte injektive Pfad in G^* , der τ_1 und τ_2 verbindet, enthält jedoch die Ecke δ . Also können τ_1 und τ_2 in G' nicht verbunden sein. Der Graph G' besitzt damit genau zwei Zusammenhangskomponenten, von denen eine τ_1 , die andere τ_2 enthält.

Es gilt $A\delta = \delta$ und $A \neq I$. Nach Proposition 4.9 werden dann unter A die zwei Kanten von $E_+(G^*)$ mit Anfangspunkt δ vertauscht. Somit gilt $A\tau_1 = \tau_2$ und $A\tau_2 = \tau_1$. Da F zusammenhängend ist und δ nicht enthält, liegt es ganz in einer von beiden Zusammenhangskomponenten. Entsprechend liegt AF in der anderen Zusammenhangskomponente und der Durchschnitt von F und AF muß leer sein.

Fall II. $x = \tau$ für ein $\tau \in K_3$. Analog zu Fall I gibt es genau drei Ecken δ_1, δ_2 und δ_3 , die zu τ benachbart sind (Lemma 3.18). Diese werden unter A in nicht-trivialer Weise zyklisch permutiert (Proposition 4.10). Der Subgraph $G' := G^* \setminus \{\tau\}$ hat genau drei Zusammenhangskomponenten, die je eine der Ecken δ_1, δ_2 und δ_3 enthalten. Da F und AF in verschiedenen dieser Zusammenhangskomponenten liegen, ist ihr Durchschnitt leer. \square

Definition. Sei

- S_2 die Menge der Elemente aus S , die ein $\delta \in V(F) \cap K_2$ fix lassen,
- S_3 die Menge der Elemente aus S , die ein $\tau \in V(F) \cap K_3$ fix lassen, und
- $S_f \subset S$ die Menge der Elemente ohne Fixpunkt in $V(F)$.

Dann ist die Seitenpaarung S die disjunkte Vereinigung dieser drei Mengen:

$$S = S_2 \dot{\cup} S_3 \dot{\cup} S_f.$$

Proposition 5.10. Sei $\delta \in V(F) \cap K_2$ terminal in F . Dann gibt es genau ein $A \in \Lambda$, $A \neq I$, für das $A\delta \in F$ ist. Existiert umgekehrt zu $A \in \Lambda$, $A \neq I$, ein $\delta \in V(F) \cap K_2$ mit $A\delta \in V(F)$, dann ist δ terminal. Falls $A\delta = \delta$ gilt, ist A aus S_2 . Sonst ist A aus S_f .

Beweis. Sei δ terminal in F . Von den zwei Kanten von $E_+(G^*)$ mit Anfangspunkt δ sei B diejenige, die in F liegt. Die andere, BV , liegt in AF für genau (FUN3) ein $A \in \Lambda$ (FUN2). Wegen $BV \notin F$ gilt $A \neq I$. Es ist $A^{-1}BV$ in $E_+(F)$ und damit $A^{-1}o(BV) = A^{-1}\delta \in F$.

Es soll gezeigt werden, daß dieses A^{-1} eindeutig bestimmt ist: Sei $A' \in \Lambda$, $A' \neq I$, mit $A'\delta \in F$. Eine der beiden Kanten aus $E_+(G^*)$ mit Anfangspunkt δ muß wegen $A'\delta \in V(F)$ unter A' in F abgebildet werden: $A'B$ oder $A'BV$ liegt in F . Da $B \in F$ ist und mit (FUN3) $A'E_+(F) \cap E_+(F) = \emptyset$ für $A' \neq I$ gilt, liegt nur $A'BV$ in F . Also ist $BV \in A'^{-1}F$. Nun gilt $BV \in AF$ und $BV \in A'^{-1}F$, also $AE_+(F) \cap A'^{-1}E_+(F) \neq \emptyset$. Mit (FUN3) folgt daraus $A' = A^{-1}$.

Seien nun umgekehrt $A \in \Lambda$, $A \neq I$, und $\delta \in V(F) \cap K_2$, so daß $A\delta$ in F liegt. Dann ist δ nach Lemma 5.7 terminal in F . Ist $A\delta = \delta$, dann ist $A \in S_2$ nach Definition. Andernfalls ist, da $AF \cap F = \{\delta\}$ gilt (Proposition 5.3), wegen $A\delta \neq \delta$ keine Ecke von F ein Fixpunkt von A , also $A \in S_f$. \square

Proposition 5.11. Sei $A \in S_f$, dann gibt es genau eine terminale Ecke $\delta \in V(F) \cap K_2$ mit $A\delta \in V(F)$.

Beweis. Da A in der Seitenpaarung S liegt, ist $AF \cap F$ nicht leer. Nach Proposition 5.3 liegt genau eine Ecke x in diesem Durchschnitt. Nach Lemma 5.7 ist sie terminal. Wäre $x \in K_3$, dann gälte wegen Eigenschaft (*) $Ax = x$ und A hätte einen Fixpunkt. Also ist $x \in K_2$. \square

Proposition 5.12. Sei $\tau \in V(F) \cap K_3$ terminal in F . Dann gibt es ein $A \in \Lambda$, $A \neq I$, mit $A\tau \in V(F)$. Für jedes solche A gilt $A\tau = \tau$ und damit $A \in S_3$.

Beweis. Da τ terminal in F ist, gibt es genau eine Kante B aus $E_+(F)$, deren Endpunkt $[B]_3 = \tau$ ist. Wegen (FUN2) gibt es ein $A' \in \Lambda$, $A' \neq I$, so daß BU in $A'F$ liegt. Da $A'^{-1}BU$ in F liegt, gilt $[A'^{-1}BU]_3 \in V(F)$ und damit $A'^{-1}\tau = A'^{-1}[B]_3 = A'^{-1}[BU]_3 \in V(F)$. Mit $A := A'^{-1}$ folgt $A \neq I$ und $A\tau \in V(F)$.

Für jedes $A \in \Lambda$ mit $A\tau \in V(F)$ folgt $A\tau = \tau$ aus der Eigenschaft (*). \square

Proposition 5.13. Die Menge S_f enthält zu jedem Element $A \in S_f$ auch das Inverse und es gilt $A \neq A^{-1}$.

Beweis. Zu $A \in S_f$ sei $\delta \in V(F)$ eine Ecke, für die $A\delta \in F$ gilt. Dann ist $A^{-1}(A\delta)$ in $V(F)$ und damit $A^{-1} \in S$. Hätte A^{-1} einen Fixpunkt $a \in V(F)$, also $A^{-1}a = a$, dann wäre $a = AA^{-1}a = Aa$ auch ein Fixpunkt von A in F . Dies widerspräche $A \in S_f$, also hat A^{-1} keinen Fixpunkt in F und liegt damit in S_f .

Aus Proposition 5.9 folgt, daß A keinen Fixpunkt in G^* hat. Nach Satz 4.13 ist die Ordnung von A dann unendlich. Insbesondere ist $A^2 \neq I$ und damit $A \neq A^{-1}$. \square

Proposition 5.14. Die Menge S_3 enthält zu jedem Element $A \in S_3$ auch das Inverse und es gilt $A \neq A^{-1}$.

Beweis. Zu $A \in S_3$ sei $\tau \in V(F)$ eine Ecke, für die $A\tau = \tau$ ist. Dann ist $\tau = A^{-1}A\tau = A^{-1}\tau$. Also ist τ auch ein Fixpunkt von A^{-1} . Nach Lemma 4.10 ist A zu U oder U^2 konjugiert, also gilt $A \neq A^{-1}$. \square

Proposition 5.15. Für jedes $A \in S_2$ gilt $A^{-1} = A$. Insbesondere gilt $S_2^{-1} = S_2$.

Beweis. Nach Lemma 4.9 ist A zu V konjugiert. Also ist $A^2 = I$ und damit $A^{-1} = A \in S$. \square

Proposition 5.16. Zu jedem $A \in S$ ist das Inverse in S enthalten.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Propositionen 5.13, 5.14 und 5.15. \square

Definition. Die Menge S'_f sei eine maximale Teilmenge von S_f , die zu keinem Element das Inverse enthält. Die Menge S'_3 sei eine maximale Teilmenge von S_3 , die zu keinem Element das Inverse enthält.

Die Mengen S'_f und S'_3 stellen eine Auswahl aus jedem Paar $\{A, A^{-1}\}$ für $A \in S_f$ beziehungsweise $A \in S_3$ dar. Daß $A \neq A^{-1}$ gilt, ist durch die Propositionen 5.13 und 5.14 gesichert. Insbesondere gilt $\#S'_f = \frac{1}{2}\#S_f$ und $\#S'_3 = \frac{1}{2}\#S_3$.

Satz 5.17. Ist τ aus K_3 terminal in F , dann gibt es genau ein $A \in S'_3$, so daß $A\tau = \tau$ ist. Ist δ aus K_2 terminal in F , dann gibt es entweder genau ein $A \in S_2$ mit $A\delta = \delta$ oder es gibt genau ein terminales $\delta' \in K_2$ in F , $\delta' \neq \delta$, sowie genau ein $A \in S_f$ mit $A\delta = \delta'$.

Umgekehrt existiert zu jedem $A \in S'_3$ genau ein terminales $\tau \in K_3$ in F mit $A\tau = \tau$, zu jedem $A \in S_2$ genau ein terminales $\delta \in K_2$ in F mit $A\delta = \delta$ und zu jedem $A \in S'_f$ genau ein Paar (δ, δ') verschiedener terminaler Ecken aus K_2 , so daß $A\delta = \delta'$ gilt. Für die Anzahl k der terminalen Ecken von F gilt insgesamt

$$k = \#S_2 + \#S'_3 + 2\#S'_f.$$

Beweis. Sei $\tau \in K_3$ terminal in F , dann gibt es nach Proposition 5.12 ein $A' \in S_3$, so daß $A'\tau = \tau$ ist. Sei B die eindeutig bestimmte Kante in F mit $t(B) = \tau$. Wegen $A' \neq I$ gilt nach Proposition 4.10 entweder $A' = BUB^{-1}$ oder $A' = BU^2B^{-1}$. Diese beiden Elemente sind zueinander invers, also liegt nach Definition genau eines von beiden in S'_3 .

Sei $\delta \in K_2$ terminal in F , dann gibt es nach Proposition 5.10 genau ein $A \in S$, so daß $A\delta \in F$ ist. Ist $A\delta = \delta$, dann ist $A \in S_2$. Ist dagegen $A\delta \neq \delta$, dann ist $A \in S_f$ und es gibt genau ein δ' , nämlich $A\delta$, so daß $A\delta = \delta'$ ist.

Ist $A \in S'_3$, dann hat A nach Definition einen Fixpunkt $\tau \in V(F)$. Dieses τ ist nach Lemma 5.7 terminal in F . Mit Proposition 5.3 folgt, daß im Durchschnitt $V(F) \cap AV(F)$ genau eine Ecke liegt, also ist τ eindeutig bestimmt.

Analog folgen Existenz und Eindeutigkeit passender terminaler Ecken für Elemente aus S_2 und S'_f . □

Lemma 5.18. Hat $A \in S_2$ den Fixpunkt $\delta = \left[\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \right]_2$ in F , dann ist

$$A = \begin{bmatrix} bd + ac & -a^2 - b^2 \\ c^2 + d^2 & -bd - ac \end{bmatrix}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $A \neq I$. Aus Proposition 4.9 folgt dann

$$A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] V \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} bd + ac & -a^2 - b^2 \\ c^2 + d^2 & -bd - ac \end{bmatrix}.$$

□

Lemma 5.19. Hat $A \in S_3$ den Fixpunkt $\tau = \left[\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right] \right]_3$ in F , dann ist A oder A^2 gleich

$$\begin{bmatrix} -bd - ac - bc & b^2 + a^2 + ab \\ -d^2 - c^2 - cd & bd + ac + ad \end{bmatrix}.$$

Beweis. Es ist $A \neq I$. Nach Proposition 4.10 folgt

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -bd - ac - bc & b^2 + a^2 + ab \\ -d^2 - c^2 - cd & bd + ac + ad \end{bmatrix}$$

oder

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} U^2 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$$

und damit

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}.$$

□

Lemma 5.20. Seien δ und δ' Ecken aus F mit $\delta \neq \delta'$ und sei $A \in S_f$ mit $A\delta = \delta'$. Ist $\delta = [I]_2$, dann sei $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := V$. Ansonsten sei $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ die nach Bemerkung 3.12 und Proposition 3.15 eindeutig bestimmte Kante aus $E_+(\delta) \subset E_+(G)$, die (SIG+) erfüllt. Ist $\delta' = [I]_2$, dann sei $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} := V$. Ansonsten sei $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ die eindeutig bestimmte Kante aus $E_+(\delta')$, die (SIG+) erfüllt.

Dann gilt

$$A = \begin{bmatrix} b'd + a'c & -bb' - aa' \\ dd' + cc' & -bd' - ac' \end{bmatrix}.$$

Beweis. Sei zuerst $\delta \neq [I]_2$. Dann gibt es in $E_+(\delta)$ genau eine Kante, die (SIG+), und genau eine, die (SIG-) erfüllt (Bemerkung 3.12 und Proposition 3.15). Da δ Valenz 1 in F hat (Lemma 5.7), kann von diesen zwei Kanten nur eine in F sein.

Da F zusammenhängend ist, (FUN1), und I enthält, (SPF2), liegt der eindeutig bestimmte injektive Pfad φ , der in G^* die Ecke $[I]_2$ mit δ verbindet, in F . Nach Lemma 3.24 liegt die Kante aus $E_+(\delta)$, die (SIG-) erfüllt, in $E(\varphi)$ und damit in F .

Also ist $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, die Kante aus $E_+(\delta)$ mit (SIG+), nicht in F enthalten. Ist $\delta = [I]_2$, dann ist $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = V$, was nicht in F liegen kann, da wegen (SPF2) I in F ist und

δ terminal in F ist. In beiden Fällen ist $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ nicht in F .

Mit einem analogen Beweis folgt, daß $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ nicht in F enthalten ist.

Wegen $A\delta = \delta'$ gilt $A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} V$ oder $A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$.

Sei $B \in E_+(\delta)$ diejenige Kante von $E_+(\delta)$, die in F liegt, und sei $B' \in E_+(\delta')$ diejenige Kante von $E_+(\delta')$, die in F liegt. Damit $AF \cap F$ keine Kante enthält, muß $AB \neq B'$, also $AB = B'V$ sein.

Die in F enthaltenen Kanten von $E_+(\delta)$ und $E_+(\delta')$ sind $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} V$ beziehungsweise

$B' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} V$, also gilt:

$$A = B'VB^{-1} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} V^3 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} b'd + a'c & -bb' - aa' \\ dd' + cc' & -bd' - ac' \end{bmatrix}.$$

□

5.3 Unabhängige Erzeuger

Sei F ein spezieller Fundamentalbereich zur Untergruppe Λ und sei S die Seitenpaarung dazu.

Zur Erinnerung: Zu jedem $y \in E(G^*)$ ist y^+ die eindeutig bestimmte Kante aus $\{y, \bar{y}\} \cap E_+(G^*)$. Für Lemma 5.21 und seine Folgerungen, für Satz 5.22 sowie für Lemma 5.24 gelte stets:

- Sei φ ein injektiver Pfad der Länge $n > 2$ in G^* .
- Zu jedem $k = 0, \dots, n-1$ sei B_k das wegen (FUN2) existierende und wegen (FUN3) eindeutig bestimmte Element aus Λ mit $\varphi((k, k+1))^+ \in B_k F$.
- Sei $D_k := B_k^{-1} B_{k+1}$ für alle $k = 0, \dots, n-2$.

Lemma 5.21. *Gilt $B := B_a = B_b$ für $0 \leq a < b \leq n-1$, dann ist $B_k = B$ für alle $k = a, \dots, b$.*

Beweis. Da $\varphi((a, a+1))^+$ und $\varphi((b, b+1))^+$ in BF liegen, sind die Ecken $\varphi_V(a)$ und $\varphi_V(b+1)$ in $V(BF)$ enthalten. Der Teilpfad $\varphi' := \varphi|_{[a, b+1]}$ ist der eindeutig bestimmte injektive Pfad, der die Ecken $\varphi_V(a)$ und $\varphi_V(b+1)$ im Baum BF verbindet. Für alle $a \leq k \leq b$ gilt $\varphi_E((k, k+1))^+ = \varphi'_E((k-a, k-a+1))^+$, also ist jede dieser Kanten in BF enthalten. Es folgt $B_k = B$ für alle $a \leq k \leq b$. □

Folgerung. *Seien a minimal und b maximal mit $B_a = B_b = B$ für ein vorgegebenes B . Ist $k \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $B_k = B$, dann ist $a \leq k \leq b$.*

Folgerung. *Ist $B_k \neq B_{k-1}$ für ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$, dann ist*

$$k = \min \left\{ l \in \{0, \dots, n-1\} \mid B_l = B_k \right\}.$$

Satz 5.22. *Sei $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Äquivalent sind:*

(1) Es gilt $D_{k-1} \neq I$, also $B_{k-1} \neq B_k$.

(2) $k = \min \left\{ l \in \{0, \dots, n-1\} \mid B_l = B_k \right\}$.

(3) $B_k^{-1}\varphi_V(k)$ ist terminal in F .

(4) $B_{k-1}^{-1}\varphi_V(k)$ ist terminal in F .

(5) Der Durchschnitt $B_{k-1}F \cap B_kF$ enthält genau die Ecke $\varphi_V(k)$.

Treffen (1)-(5) zu, so gilt $D_{k-1} \in S$.

Beweis. (1) \Rightarrow (2): Dies ist die zweite Folgerung aus Lemma 5.21.

(1) \Rightarrow (3): Es gilt $B_{k-1} \neq B_k$. Die Kante $\varphi_E((k-1, k))^+$ liegt nicht in B_kF . Da es also eine Kante $B_k^{-1}\varphi_E((k-1, k))^+$ in G^* gibt, die nicht in $B_k^{-1}B_kF = F$ liegt, hat die Ecke $B_k^{-1}\varphi_V(k)$ nicht volle Valenz in F . Nach (SPF3) beziehungsweise nach Definition ist $B_k^{-1}\varphi_V(k)$ dann terminal in F .

(1) \Rightarrow (4): Dies erfolgt nach einem analogen Argument zu (1) \Rightarrow (3).

(1) \Rightarrow (5): Die Ecke $\varphi_V(k)$ liegt als Endpunkt von $\varphi_E((k-1, k))$ in $B_{k-1}F$. Genau so liegt sie als Anfangspunkt von $\varphi_E((k, k+1))$ in B_kF .

Wegen $B_{k-1} \neq B_k$ gilt $B_{k-1}F \neq B_kF$. Der Durchschnitt $B_{k-1}^{-1}B_{k-1}F \cap B_{k-1}^{-1}B_kF = F \cap D_{k-1}F$ enthält die Ecke $B_{k-1}^{-1}\varphi_V(k)$, ist aber nicht ganz F . Nach Lemma 5.3 besteht $F \cap D_{k-1}F$ aus höchstens einer Ecke. Also ist auch im Durchschnitt $B_{k-1}F \cap B_kF$ genau eine Ecke enthalten, nämlich $\varphi_V(k)$. Hieraus folgt, daß D_{k-1} in S liegt.

(2) \Rightarrow (1): Unmittelbar folgt $B_{k-1} \neq B_k$.

(3) \Rightarrow (1): Da die Kante $B_k^{-1}\varphi_E((k, k+1))^+$ in F liegt und $B_k^{-1}\varphi_V(k)$ terminal in F ist, liegt $B_k^{-1}\varphi_E((k-1, k))^+$ nicht in F . Daraus folgt $B_{k-1} \neq B_k$.

(4) \Rightarrow (1): Da die Kante $B_{k-1}^{-1}\varphi_E((k-1, k))^+$ in F liegt und $B_{k-1}^{-1}\varphi_V(k)$ dort terminal ist, liegt die Kante $B_{k-1}^{-1}\varphi_E((k, k+1))^+$ nicht in F . Damit ist $B_{k-1} \neq B_k$.

(5) \Rightarrow (1): Da die Kante I in F liegt, aber $B_{k-1}F \cap B_kF$ nur aus einer Ecke besteht, ist $B_{k-1}I \notin E_+(B_kF)$ und damit insbesondere $B_{k-1} \neq B_k$. \square

Lemma 5.23. *Liegt $A = \varphi_E((n-1, n))^+$, die letzte Kante von φ , in Λ , dann gilt $A = B_{n-1}$.*

Beweis. Nach Definition ist B_{n-1} das eindeutig bestimmte Element aus Λ mit $A \in B_{n-1}F$. Wegen (SPF2) gilt $A \in AF$. A liegt in Λ , also folgt $B_{n-1} = A$. \square

Lemma 5.24. *Seien die Voraussetzungen von Lemma 5.23 erfüllt. Sei weiter $b \in \{0, \dots, n-1\}$ minimal mit $B_b = B_{n-1} = A$. Sei $B \in S$. Gibt es ein $a \in \{0, \dots, n-2\}$ mit $B_a = AB$, dann ist $B_{b-1} = AB$.*

Beweis. Da $AF \cap ABF$ genau eine Ecke enthält, ist der Subgraph $F' := AF \cup ABF$ zusammenhängend und damit ein Baum. Der Teilpfad $\varphi|_{[a,n]}$ verbindet die Ecke $\varphi_V(a) \in V(ABF)$ mit $\varphi_V(n) \in V(AF)$. Der Teilpfad eines injektiven Pfades ist selbst injektiv, also muß dieser Teilpfad der eindeutig bestimmte injektive Pfad in F' sein, der $\varphi_V(a)$ mit $\varphi_V(n)$ verbindet. Da er ganz in F' liegt, gilt $B_k \in \{A, AB\}$ für alle $k \geq a$. Da schließlich b minimal mit $B_b = A$ ist und (wegen Lemma 5.21) $a < b$ gilt, folgt $B_{b-1} = AB$. \square

Satz 5.25. Die Mengen $S'_f \subset S_f$ und $S'_3 \subset S_3$ seien wie gehabt maximale Teilmengen, die zu keinem Element das Inverse enthalten. Sei

$$P := \langle S'_f \rangle * \left(\bigstar_{s \in S_2} \langle s \rangle \right) * \left(\bigstar_{s \in S'_3} \langle s \rangle \right),$$

also das freie Produkt der freien Gruppe mit Basis S'_f mit den zyklischen Gruppen, die von den s aus S_2 und S'_3 erzeugt sind. Dann ist $\Lambda \cong P$.

Beweis. Sei $S' := S'_f \cup S_2 \cup S'_3$. Für jedes $s \in S'$ ordne der Homomorphismus $\Phi_s : \langle s \rangle \rightarrow \Gamma$ den Elementen der von s erzeugten Untergruppe ihr Gegenstück in Γ zu. Aufgrund der universellen Eigenschaft des freien Produkts existiert genau ein Homomorphismus $\Phi : P \rightarrow \Lambda$, so daß für jedes $s \in S'$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \langle s \rangle & \xrightarrow{\iota_s} & P \\ & \searrow \Phi_s & \downarrow \Phi \\ & & \Lambda \end{array}$$

kommutiert, wobei ι_s die kanonische Einbettung von $\langle s \rangle$ in P ist.

Es soll nun eine Umkehrabbildung $\Psi : \Lambda \rightarrow P$ zu Φ konstruiert werden. Sei $\Psi(I)$ nach Definition das Einselement in P . Zu einem $A \in \Lambda$, $A \neq I$, sei φ der eindeutig bestimmte injektive Pfad in G^* , der I als erste und A als letzte Kante besitzt (Proposition 1.17). Sei n die Länge von φ . Es gilt $n \geq 2$, da φ mindestens zwei verschiedene Kanten aus $E_+(G^*)$ besucht.

Für jedes $k = 0, \dots, n-1$ sei B_k das wegen (FUN2) und (FUN3) existierende und eindeutig bestimmte Element aus Λ , für das $\varphi_E((k, k+1))^+ \in E_+(B_k F)$ liegt. Es gilt $B_0 = I$ und $B_{n-1} = A$.

Für jedes $k = 0, \dots, n-2$ sei $D_k := B_k^{-1} B_{k+1}$. Ist $D_k \neq I$, dann ist es nach Satz 5.22 in der Seitenpaarung S enthalten. Die Abbildung $\psi : S \cup \{I\} \rightarrow P$ ordne jedem Element aus S seine Entsprechung in P zu; $\psi(I)$ sei das Einselement in P . Zu

$$A = \prod_{k=0}^{n-2} B_k^{-1} B_{k+1} = \prod_{k=0}^{n-2} D_k$$

sei $\Psi(A) := \prod_{k=0}^{n-2} \psi(D_k)$.

Es gilt

$$\Phi \circ \Psi(A) = \Phi \left(\prod_{k=0}^{n-2} \psi(D_k) \right) = \prod_{k=0}^{n-2} \Phi(\psi(D_k)) = \prod_{k=0}^{n-2} D_k = A.$$

Da Ψ ein Rechtsinverses zu Φ ist, ist Φ surjektiv.

Sei $A \in \Lambda$ beliebig und $B \in S$. Es soll $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$ gezeigt werden. Ist $AB = I$, also $B = A^{-1}$, dann ist $\Psi(AB) = \Psi(I)$ und

$$\Psi(A)\Psi(B) = \psi(A)\psi(A^{-1}) = \psi(A)\psi(A)^{-1} = \Psi(I)$$

nach Definition von ψ . Ist $A \neq I$, dann gilt

$$\Psi(AB) = \psi(B) = \psi(I)\psi(B) = \Psi(A)\Psi(B).$$

Sei nun also $AB \neq I$ und $A \neq I$. Zu A seien φ , n und die B_k , D_k wie oben. Wegen $A \neq I$ gilt $n \geq 2$.

Fall I. Es gibt ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $AB = B_k$. Sei a minimal mit $B_a = AB$ und sei b minimal mit $B_b = A = B_{n-1}$. Nach Lemma 5.24 gilt $B_{b-1} = AB$. Also gilt nach Lemma 5.21 $B_k = AB$ für alle $k = a, \dots, b-1$ und $B_k = A$ für alle $k = b, \dots, n-1$. Damit folgt $D_{b-1} = B^{-1}$ und $D_k = I$ für $k \in \{a, \dots, b-2\} \cup \{b, \dots, n-2\}$.

Nach Satz 5.22 folgt aus der Minimalität von a , daß die Ecke $\varphi_V(a)$ terminal in ABF ist. Sei A' die eindeutig bestimmte Kante in $E_+(ABF)$, die $\varphi_V(a)$ als Anfangs- oder Endpunkt besitzt.

Sei φ_1 der Pfad im Baum ABF , der A' als erste und AB als letzte Kante besitzt (Proposition 1.17). Sei n_1 die Länge von φ_1 .

Da $(\varphi|_{[0,a]})_V(a) = \varphi_V(a) = (\varphi_1)_V(0)$ ist, lassen sich $\varphi|_{[0,a]}$ und φ_1 mit Satz 1.8 zu einem Pfad φ' verketteten.

Ebenfalls nach diesem Satz ist φ' injektiv, denn der injektive Pfad φ_1 liegt ganz in ABF , während der injektive Teilpfad $\varphi|_{[0,a]}$ in ABF lediglich die Ecke $\varphi_V(a)$ besucht. Sei $n' = a + n_1$ die Länge von φ' .

Seien B'_k und D'_k zu φ' gegeben, indem B'_k das eindeutig bestimmte Element aus Λ mit $\varphi'_E((k, k+1))^+ \in B'_k F$, $k = 0, \dots, n'-1$, und $D'_k := (B'_k)^{-1} B'_{k+1}$, $k = 0, \dots, n'-2$, sei. Dann gilt $B'_k = B_k$ für $k = 0, \dots, a-1$ und damit $D'_k = D_k$ für $k = 0, \dots, a-2$. Wegen $B'_a = B_a = AB$ gilt auch $D'_{a-1} = D_{a-1}$. Wegen $B'_k = AB$ für $k > a$ ist $D'_k = I$ für alle $k \geq a$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \Psi(AB) &= \psi(D'_0) \dots \psi(D'_{n'}) = \psi(D'_0) \dots \psi(D'_{a-1}) \\ &= \psi(D_0) \dots \psi(D_{a-1}) \psi(B^{-1}) \psi(B) \\ &= \psi(D_0) \dots \psi(D_{a-1}) \psi(D_a) \dots \psi(D_{b-2}) \psi(D_{b-1}) \psi(B) \\ &= \Psi(A)\Psi(B). \end{aligned}$$

Fall II. $B_k \neq AB$ für alle k . Sei a minimal mit $B_a = A$. Nach Satz 5.22 ist die Ecke $\varphi_V(a)$ dann terminal in AF . Sei x die eindeutig bestimmte Ecke im Durchschnitt $AF \cap ABF$, also $A^{-1}x \in V(F \cap BF)$. Dann ist x nach Lemma 5.7 terminal in AF und in ABF .

Sei φ_1 der nach Proposition 1.15 eindeutig bestimmte injektive Pfad in AF , der $\varphi_V(a)$ mit x verbindet. Da x in ABF terminal ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Kante aus $E_+(ABF)$, die x als Anfangs- oder Endpunkt besitzt. Diese sei mit A' bezeichnet. Sei φ_2 der injektive Pfad in ABF , der A' als erste und AB als letzte Kante besitzt (Proposition 1.17). Sei n_1 die Länge des Pfades φ_1 und n_2 die Länge von φ_2 .

Die Pfade $\varphi|_{[0,a]}$, φ_1 und φ_2 sind injektiv. Es gilt

$$\varphi_V(a) = (\varphi_1)_V(0) \text{ und } (\varphi_1)_V(n_1) = (\varphi_2)_V(0) = x.$$

Nach Satz 1.8 lassen sich $\varphi|_{[0,a]}$, φ_1 und φ_2 zu einem Pfad φ' der Länge $n' := a + n_1 + n_2$ verketten. Dieser ist injektiv, denn $\varphi|_{[0,a]}$ besucht an Ecken von AF lediglich $\varphi_V(a)$ und an Ecken aus ABF höchstens ebenfalls $\varphi_V(a)$, nämlich falls $n_1 = 0$, also $x = \varphi_V(a)$, ist. Der Pfad φ_1 liegt ganz in AF und besucht an Ecken aus ABF genau x . Der Pfad φ_2 liegt ganz in ABF .

Seien B'_k und D'_k zu φ' festgelegt, indem B'_k das eindeutig bestimmte Element aus Λ mit $\varphi_E((k, k+1))^+ \in B'_k F$, $k = 0, \dots, n' - 1$, und $D'_k := (B'_k)^{-1} B'_{k+1}$, $k = 0, \dots, n' - 2$, sei. Dann ist $B'_k = B_k$, $k = 0, \dots, a - 1$, und damit $D'_k = D_k$ für alle $k < a - 1$.

Fall II.a. $n_1 = 0$, also $x = \varphi_V(a)$. Dann ist $B'_a = AB$ und nach Lemma 5.21 $B'_k = AB$ für alle $k \geq a$. Damit folgt $D'_{a-1} = (B'_{a-1})^{-1} B'_a = B_{a-1}^{-1} AB = B_{a-1}^{-1} B_a B = D_{a-1} B$. Weiter folgt $D'_k = I$ für alle $k \geq a$.

Wäre $x \in K_2$, dann läge $\varphi_E((a-1, a))^+$ in ABF und es gälte Fall I. Also ist $x \in K_3$.

Es gilt $x \in V(B_{a-1} F \cap B_a F) = V(AD_{a-1}^{-1} F \cap AF)$, also $A^{-1}x \in V(D_{a-1}^{-1} F \cap F)$. Da der spezielle Fundamentalbereich F die Eigenschaft $(*)$ erfüllt, ist $D_{a-1}^{-1} A^{-1}x = A^{-1}x$. Analog ist $BA^{-1}x = A^{-1}x$. Nach Satz 5.17 gibt es genau ein Paar $\{B', B'^{-1}\}$ von Elementen, die $A^{-1}x$ fix lassen. Es ist $D_{a-1}^{-1} \neq B$, denn sonst gälte $B_{a-1} = AB$ und damit Fall I, also gilt $B = D_{a-1}$. Somit ist $\psi(D'_{a-1}) = \psi(D_{a-1} B) = \psi(D_{a-1}) \psi(B)$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \Psi(AB) &= \psi(D'_0) \dots \psi(D'_{n'}) \\ &= \psi(D_0) \dots \psi(D_{a-2}) \psi(D'_{a-1}) \\ &= \psi(D_0) \dots \psi(D_{a-2}) \psi(D_{a-1}) \psi(B) \\ &= \Psi(A) \Psi(B). \end{aligned}$$

Fall II.b. $n_1 > 0$. Dann ist $B'_k = A$ für $k = a, \dots, a + n_1 - 1$. Weiter ist $B'_k = AB$ für alle $k = a + n_1, \dots, n' - 1$. Also gilt $D'_{a-1} = D_{a-1}$ und $D'_k = I$ für $k = a, \dots, a + n_1 - 2$ sowie $D'_{a+n_1-1} = B$ und $D'_k = I$ für $k \geq a + n_1$.

Damit folgt

$$\begin{aligned}\Psi(AB) &= \psi(D'_0) \dots \psi(D'_{n'}) = \psi(D_0) \dots \psi(D_{a-1})\psi(B) \\ &= \Psi(A)\Psi(B).\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$ für alle $A \in \Lambda$, $B \in S$. Jedes $\alpha \in P$ läßt sich als Produkt $\alpha = x_1 \dots x_n$ mit $n \geq 0$ und $x_1, \dots, x_n \in S$ darstellen. Dann gilt

$$(\Psi \circ \Phi)(\alpha) = \Psi\left(\prod_{k=1}^n \Phi(x_k)\right) = \prod_{k=1}^n \psi(\Phi(x_k)) = \alpha,$$

also ist Ψ auch ein Linksinverses zu Φ , welches demnach ein Isomorphismus ist. □

Bemerkung 5.26. Die Abbildung Ψ im Beweis von Satz 5.25 ist ein Isomorphismus.

Vergleiche [Kul91, Thm. 6.1]. Satz 5.25 kann auch als Anwendung von [Ser80, Chap. I, Par. 5.4, Thm. 13] bewiesen werden. Daß eine Untergruppe des freien Produkts von zwei Gruppen X und Y das freie Produkt einer freien Untergruppe von $X * Y$ mit den von ausgewählten Konjugierten von X und Y erzeugten Untergruppen ist, ist ein berühmter Satz von Kurosch [Kur34].

Ist zu Λ ein spezieller Fundamentalbereich samt Seitenpaarung bekannt, dann können daraus die Erzeuger von Λ in Matrixform mittels der Lemmata 5.18, 5.19 und 5.20 errechnet werden.

Lemma 5.27. Sei H ein endlicher, zusammenhängender, nicht-leerer Subgraph von G^* . Die Valenz von Ecken aus $V(H) \cap K_3$ in H sei 3. Sei weiter k die Anzahl der Kanten aus $E_+(H) \subset E_+(G^*)$ und t die Anzahl der terminalen Ecken von H . Dann ist $t = 2 + \frac{k}{3}$.

Beweis. Sei v_3 die Anzahl der Ecken aus K_3 in H . Sei v_2 die Anzahl der Ecken aus K_2 in H . In einem endlichen Baum ist die Anzahl der Ecken um eins größer, als die Anzahl der Kanten in einer Orientierung [Ser80, Chap. I, Par. 2.3, Prop. 12], also gilt $v_2 + v_3 - 1 = k$.

Jede Kante aus $E_+(H)$ hat ihren Endpunkt in K_3 , jede Ecke aus K_3 hat Valenz 3. Also ist $v_3 = \frac{k}{3}$. Die Anzahl der Kanten aus $E_+(H)$, deren Anfangspunkt nicht terminal ist, ist $k - t$. Jede Ecke aus $V(H) \cap K_2$, die nicht terminal ist, hat Valenz 2. Also ist $v_2 - t = \frac{k-t}{2}$.

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}
v_2 + v_3 - 1 &= k, \\
\frac{k-t}{2} + t + \frac{k}{3} - 1 &= k, \\
k - t + 2t + \frac{2k}{3} - 2 &= 2k, \\
t &= 2 + 2k - k - \frac{2k}{3}, \\
t &= 2 + \frac{k}{3}.
\end{aligned}$$

□

Satz 5.28. *Habe Λ endlichen Index μ in Γ . Ist mit obigen Bezeichnungen $r_2 = \#S_2$, $r_3 = \#S'_3$ und $r_f = \#S'_f$, dann gilt:*

$$\mu = 3r_2 + 4r_3 + 6(r_f - 1).$$

Beweis. Nach Bemerkung 5.2 ist der Index μ von Λ gleich der Anzahl von Kanten, die in $E_+(F) \subset E_+(G^*)$ liegen. Die Anzahl der terminalen Ecken von F , die in K_3 liegen ist r_3 . Die Anzahl der terminalen Ecken, die in K_2 liegen, ist nach Satz 5.17 $r_2 + 2r_f$.

Sei T die Menge der terminalen Ecken in K_3 . Sei $F' \subset F$ definiert durch $V(F') := V(F) \setminus T$ und

$$E(F') := E(F) \setminus \left\{ y \in E(F) \mid o(y) \in T \vee t(y) \in T \right\}.$$

Sei zuerst angenommen, daß für jede Kante $A \in E_+(F)$ mit $[A]_3 \in T$ gilt, daß $[A]_2$ in F' terminal ist, also in F' dieselbe Valenz wie $[A]_3$ in F hat. In diesem Fall ist die Anzahl der terminalen Ecken von F' dieselbe wie die von F , nämlich $r_3 + r_2 + 2r_f$. Alle terminalen Ecken von F' liegen in K_2 . Die Ecken aus T sind terminal in F . Also ist die Anzahl der Kanten y in $E(F)$ mit $o(y) \in T$ oder $t(y) \in T$ gleich $2r_3$. Es folgt $\#E_+(F') = \#E_+(F) - r_3$.

Nach Lemma 5.27 ist

$$r_3 + r_2 + 2r_f = \frac{\#E_+(F')}{3} + 2,$$

und damit

$$\mu = \#E_+(F) = 3(r_3 + r_2 + 2r_f - 2) + r_3 = 3r_2 + 4r_3 + 6(r_f - 1).$$

Es soll untersucht werden, wann die obige Zusatzbedingung nicht zutrifft, wann also eine Kante $A \in E_+(F)$ mit $[A]_3 \in T$ existiert, für die $[A]_2$ in F' nicht terminal ist. Da A nicht in F' liegt, ist $[A]_2$ in F' genau dann terminal, wenn AV in F' ist,

sonst ist $[A]_2$ in F' isoliert. Letzteres ist der Fall wenn entweder (Fall I) AV schon nicht in F lag oder (Fall II) $[AV]_3$ in T liegt.

Fall I. $AV \notin E_+(F)$. Dann sind $[A]_2 = [AV]_2$ und $[A]_3$ beide terminal in F . Da F zusammenhängend ist (FUN1) und I enthält (SPF2), ist F der Graph, der nur aus der Kante I sowie ihrer Umgekehrten und den Ecken $[I]_2$ und $[I]_3$ besteht. Entsprechend ist $\#S_2 = \#S'_3 = 1$ und $\#S_f = 0$. Also gilt $\mu = 1 = 3 + 4 - 6 = 3r_2 + 4r_3 - 6$.

Fall II. $AV \in E_+(F)$, $[AV]_3 \in T$. Da F zusammenhängend ist, gilt $E_+(F) = \{A, AV\}$. Mit (SPF1) folgt $E_+(F) = \{I, V\}$ und $V(F) = \{[I]_2, [I]_3, [V]_3\}$. Es folgt $S_2 = S_f = \emptyset$ und $\#S'_3 = 2$. Also gilt $\mu = 2 = 8 - 6 = 4r_3 - 6$. \square

Sei H^* die obere komplexe Halbebene vereinigt mit den rationalen Zahlen und Unendlich. Dann sind H^*/Γ und H^*/Λ kompakte Riemannsche Flächen. Für das Geschlecht g von H^*/Λ gilt

$$g = 1 + \frac{1}{12}(\mu - 6v_\infty - 3v_2 - 4v_3),$$

wobei v_∞ die Anzahl der Spitzen und v_2 und v_3 die Anzahl der elliptischen Punkte der Ordnungen 2 und 3 sind [Shi71, Prop. 1.40]. Diese Gleichung läßt sich aus der Formel in Satz 5.28 herleiten, denn r_f ist der Rang der Fundamentalgruppe der Fläche H^*/Λ und es gilt $r_f = 2g + v_\infty - 1$. Vergleiche auch [Kul91, Eq. (7.1.2)].

5.4 Freie Untergruppen

Satz 5.29. *Jede Untergruppe Λ von Γ , die kein zu V , U oder U^2 konjugiertes Element enthält, ist eine freie Gruppe.*

Beweis. Nach Satz 4.13 operiert Λ , wenn es keines dieser Elemente enthält, ohne Fixpunkt auf G^* . In der Seitenpaarung zu einem speziellen Fundamentbereich für dieses Λ sind also nur Elemente, die keinen Fixpunkt haben. Mit den Bezeichnungen aus Satz 5.25 ist $S_2 = S_3 = \emptyset$ und damit $\Lambda \cong \langle S'_f \rangle$ eine freie Gruppe. \square

Umgekehrt enthält keine freie Gruppe eines dieser Elemente. Die freien Untergruppen von Γ sind also dadurch charakterisiert, daß sie kein zu V , U oder U^2 konjugiertes Element enthalten. Ein Normalteiler von Γ enthält ein zu V , U oder U^2 konjugiertes Element genau dann, wenn er das Element selbst enthält. Es folgt:

Folgerung. *Jeder Normalteiler von Γ , der weder V noch U enthält, ist frei.*

Es ist klar, daß es nicht viele Normalteiler in Γ geben kann, die U oder V enthalten. Dies wird in Kapitel 6.3 ausgeführt werden.

Proposition 5.30. *Jede freie Untergruppe von Γ mit endlichem Index μ hat den Rang $1 + \frac{\mu}{6}$.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus Satz 5.28 ist $S_2 = S_3 = \emptyset$, also $r_2 = r_3 = 0$. Der Rang von Λ ist gleich r_f . Es folgt

$$\mu = 6(r_f - 1),$$

also

$$r_f = 1 + \frac{\mu}{6}$$

und damit die Behauptung. □

Beispiel 5.31. Die **Hauptkongruenzuntergruppen** $\Gamma(N)$, $N \in \mathbb{N}$, die durch

$$\Gamma(N) := \left\{ A \in \Gamma \mid A \equiv I \pmod{N} \right\}$$

definiert sind, sind für $N \geq 2$ freie Normalteiler.

Beweis. Durch $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ wird ein Homomorphismus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ definiert. Da $\Gamma(N)$ der Kern dieses Homomorphismus modulo ± 1 ist, ist es ein Normalteiler.

Die Elemente V und U erfüllen die Kongruenzbedingungen der Matrixeinträge nur für $N = 1$. Alle anderen Hauptkongruenzuntergruppen enthalten also weder V noch U und sind damit nach der Folgerung aus Satz 5.29 frei. □

5.5 Die Kommutatoruntergruppe der Modulgruppe

Wir benötigen:

Proposition 5.32. *Die Kommutatoruntergruppe Γ' der Modulgruppe ist eine freie Gruppe.*

Dies kann beispielsweise aus dem folgenden Satz von Nielsen geschlossen werden:

Satz 5.33. *Sei G das freie Produkt von k endlichen zyklischen Gruppen G_i der Ordnungen m_i , $1 \leq i \leq k$, dann ist die Kommutatoruntergruppe G' von G eine freie Gruppe vom Rang*

$$1 + m_1 m_2 \dots m_k \left(-1 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_i} \right) \right).$$

Beweis. Siehe [Nie48]. □

Proposition 5.34. *Die Abelisierung $\Gamma^{\text{ab}} = \Gamma/\Gamma'$ der Modulgruppe ist gleich*

$$\{\Gamma', U\Gamma', U^2\Gamma', V\Gamma', VU\Gamma', VU^2\Gamma'\}.$$

Beweis. Jedes Element $A \in \Gamma$ kann nach der Folgerung aus Satz 3.26 als Produkt in V und U dargestellt werden. In der Abelisierung kommutieren V und U , also ist das Element $A\Gamma'$ von der Form $V^k U^l \Gamma'$ für bestimmte $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wegen $V^2 = U^3 = I$ (Proposition 3.3) ist

$$V^k U^l \Gamma' \in \{\Gamma', U\Gamma', U^2\Gamma', V\Gamma', VU\Gamma', VU^2\Gamma'\},$$

also ist jede Nebenklasse von Γ' in Γ identisch zu einer dieser sechs. Insbesondere hat Γ' höchstens Index 6 in Γ .

Da Γ' frei ist (Proposition 5.32), sind V und U nicht darin enthalten. Die Untergruppen $\{\Gamma', V\Gamma'\}$ und $\{\Gamma', U\Gamma', U^2\Gamma'\}$ haben Gruppenordnung 2 beziehungsweise 3, also ist

$$[\Gamma' : \Gamma] \geq 2 \cdot 3 = 6$$

und es folgt die Behauptung. □

Vergleiche den allgemeinen Satz in [Ser80, Chap. I, Par. 1.3, Prop. 4].

Sei der Subgraph $F \subset G^*$ (mit Bemerkung 1.3) durch

$$E_+(F) := \{I, U, U^2, V, VU, VU^2\}$$

und

$$V(F) := \{[I]_2, [I]_3, [V]_3, [U]_2, [U^2]_2, [VU]_2, [VU^2]_2\}$$

definiert. Siehe Abbildung J.

Proposition 5.35. *Der Subgraph F ist ein spezieller Fundamentalbereich für Γ' .*

Beweis. Da $E_+(F)$ ein Linksnebenklassenvertretersystem von Γ/Γ' ist, erfüllt F (FUN2) und (FUN3). Sicher ist F zusammenhängend, (FUN1), (SPF1). Die Kante I ist nach Definition in $E_+(F)$, (SPF2). Die zwei Ecken aus $K_3 \cap V(F)$ sind $[I]_3$ und $[V]_3$. Beide haben Valenz 3 in F . Also sind auch (SPF3) und (*) erfüllt. □

Ist $A \in \Gamma'$, $A \neq I$, mit $AF \cap F \neq \emptyset$, dann liegt in $AF \cap F$ genau eine Ecke (Proposition 5.3), die nach Lemma 5.7 terminal in F ist. Alle terminalen Ecken in F liegen in K_2 . Nach Proposition 5.10 gibt es zu jeder solchen Ecke δ genau ein $A \neq I$ in Γ' , so daß $A\delta \in V(F)$ ist.

Die Elemente $\alpha := VUVU^2$ und $\beta := VU^2VU$ liegen in Γ' . Es gilt

$$\alpha[U]_2 = [VUVU^2U]_2 = [VU]_2,$$

die 2-Zykel $[U]_2$ und $[VU]_2$ werden unter α beziehungsweise α^{-1} ineinander abgebildet. Wegen

$$\beta[U^2]_2 = [VU^2VUU^2]_2 = [VU^2]_2$$

werden $[VU^2]_2$ und $[U^2]_2$ ineinander abgebildet.

Damit ist zu jeder terminalen Ecke $\delta \in V(F)$ das eindeutig bestimmte $A \in \Gamma'$ mit $A\delta \in V(F)$ gefunden. Die Seitenpaarung S ist $\{\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}\}$. Nach Satz 5.25 ist dann Γ' die freie Gruppe über den Erzeugern α und β .

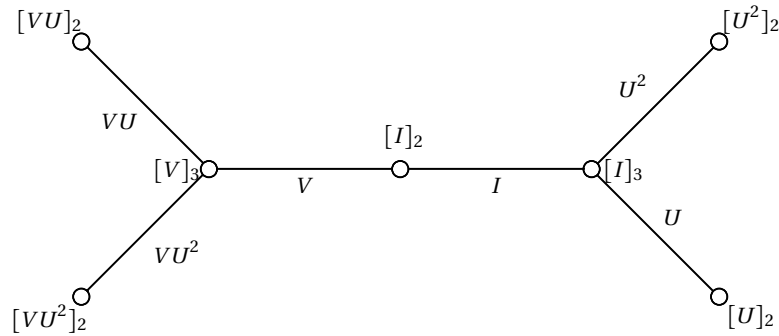


Abbildung J: Ein spezieller Fundamentalbereich für die Kommutatoruntergruppe.

6 Die Potenzuntergruppen der Modulgruppe

Die Abelisierung $\Gamma^{\text{ab}} = \Gamma/\Gamma'$ der Modulgruppe ist, wie gerade gesehen, gleich

$$\{I, U, U^2, V, VU, VU^2\}\Gamma'.$$

Die Abbildung $z_2 : \Gamma^{\text{ab}} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, die durch

$$z_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \in \{I, U, U^2\}, \\ 1, & \text{falls } A \in \{V, VU, VU^2\}, \end{cases}$$

definiert ist, ist ein Homomorphismus. Ebenso ist $z_3 : \Gamma^{\text{ab}} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit

$$z_3(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \in \{I, V\}, \\ 1, & \text{falls } A \in \{U, VU\}, \\ 2, & \text{falls } A \in \{U^2, VU^2\}, \end{cases}$$

ein Homomorphismus.

Definition. Mit

$$e(A, V) := z_2(A/\Gamma')$$

$$e(A, U) := z_3(A/\Gamma')$$

werde die **Exponentenkongruenz** von V beziehungsweise U in A bezeichnet.

Bemerkung 6.1. Die Abbildung, die einem Element seine Exponentenkongruenz zuordnet, ist als Verknüpfung von Homomorphismen selbst homomorph. Daher gilt für alle $A, B \in \Gamma$

$$e(AB, V) \equiv e(A, V) + e(B, V) \pmod{2}$$

und

$$e(AB, U) \equiv e(A, U) + e(B, U) \pmod{3}.$$

Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ ist Γ^n definiert als die von den n -ten Potenzen der Elemente von Γ erzeugte Untergruppe der Modulgruppe, also $\Gamma^n := \langle A^n \mid A \in \Gamma \rangle$.

Proposition 6.2. Die Gruppen Γ^n sind für alle $n \geq 1$ vollständig invariante Untergruppen.

Beweis. Jedes Element von Γ^n ist ein Produkt von n -ten Potenzen von Elementen aus Γ , also $A_0^n A_1^n \dots A_k^n$, $A_1, \dots, A_k \in \Gamma$. Unter jedem Automorphismus $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ wird dieses Element auf ein Produkt von n -ten Potenzen von anderen Elementen aus Γ abgebildet:

$$\varphi(A_0^n A_1^n \dots A_k^n) = \varphi(A_0)^n \varphi(A_1)^n \dots \varphi(A_k)^n.$$

Das Bild von Γ^n unter dem Automorphismus liegt also wieder in Γ^n . □

Vergleiche [New72, Chap. VIII, Par. 9]. Da Γ^n vollständig invariant ist, ist es insbesondere invariant unter den inneren Automorphismen von Γ und damit Normalteiler in Γ .

6.1 Die Untergruppe der zweiten Potenz

Proposition 6.3. Es gilt

$$\Gamma^2 = \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, V) \equiv 0 \right\}.$$

Insbesondere ist V nicht in Γ^2 enthalten.

Beweis. Ist $A \in \Gamma^2$, dann gibt es $B_0, B_1, \dots, B_n \in \Gamma$, $n \geq 0$, so daß $A = B_0^2 B_1^2 \dots B_n^2$ gilt. Da $A \mapsto e(A, V)$ ein Homomorphismus ist, gilt

$$e(A, V) \equiv \sum_{k=0}^n e(B_k^2, V) \equiv \sum_{k=0}^n 2e(B_k, V) \equiv 2 \sum_{k=0}^n e(B_k, V) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Es gilt $e(V, V) \equiv 1$, also ist V nicht in Γ^2 enthalten. Weiter ist $U = (U^2)^2$, also liegt U und damit auch U^2 in Γ^2 . Da Γ^2 ein Normalteiler ist, enthält es die dazu konjugierten Elemente VUV und VU^2V .

Damit sind die in Kapitel 5.5 errechneten Erzeuger der Kommutatoruntergruppe $VUVU^2$ und VU^2VU in Γ^2 , es folgt: $\Gamma' \subset \Gamma^2$.

Jedes $A \in \Gamma$ mit $e(A, V) \equiv 0$ ist in $\Gamma' \cup U\Gamma' \cup U^2\Gamma'$ und damit in Γ^2 enthalten. □

Proposition 6.4. Die Menge $\{I, V\}$ ist ein Nebenklassenvertretersystem von Γ/Γ^2 . Entsprechend hat Γ^2 den Index 2 in Γ .

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\Gamma &= \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, V) \equiv 0 \right\} \cup \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, V) \equiv 1 \right\} \\ &= \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, V) \equiv 0 \right\} \cup \left\{ A \in \Gamma \mid e(VA, V) \equiv 0 \right\} \\ &= \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, V) \equiv 0 \right\} \cup V \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, V) \equiv 0 \right\} \\ &= \Gamma^2 \cup V\Gamma^2.\end{aligned}$$

Da V nicht in Γ^2 enthalten ist, gilt für die letzte Vereinigung Disjunktheit. \square

Proposition 6.5. Der Subgraph F von G^* , der durch $V(F) = \{[I]_2, [I]_3, [V]_3\}$ und $E_+(F) = \{I, V\}$ gegeben ist (mit Bemerkung 1.3), ist ein spezieller Fundamentalbereich für die Operation von Γ^2 auf G^* (siehe Abbildung K).

Beweis. Wegen $E_+(F) = \{I, V\}$ gelten (FUN2) und (FUN3). Sicher ist F zusammenhängend, (FUN1), (SPF1). Die Kante I liegt nach Definition in F , (SPF2). Die Ecken aus $K_3 \cap V(F)$ sind $[I]_3$ und $[V]_3$. Beide haben Valenz 1 in F , (SPF3). Für jedes $A \in \Gamma$ mit $A[I]_3 = [V]_3$ gälte $A \in \{V, VU, VU^2\}$. Da V nicht in Γ^2 liegt, sind auch VU und VU^2 nicht darin enthalten. Also wird jede terminale Ecke aus $K_3 \cap V(F)$ unter einem Element aus Γ^2 höchstens in sich selbst abgebildet. Es folgt die Eigenschaft (*). \square

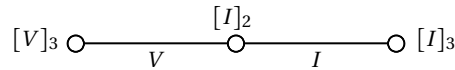


Abbildung K: Ein spezieller Fundamentalbereich für Γ^2 .

Satz 6.6. Γ^2 ist das freie Produkt der von U und VUV erzeugten Untergruppen der Ordnung 3.

Beweis. Nach Satz 5.17 gibt es zu jedem terminalen $\tau \in K_3 \cap V(F)$ genau ein Paar (A, A^{-1}) von Elementen aus der Seitenpaarung, unter denen τ fix ist.

Die Stabilisatoren von $[I]_3$ und $[V]_3$ in Γ sind $\langle U \rangle$ beziehungsweise $\langle VUV \rangle$. Also ist die Seitenpaarung S zu F durch $\{U, U^2, VUV, VU^2V\}$ gegeben.

Nach Satz 5.25 ist Γ^2 dann das freie Produkt der von U und VUV erzeugten Untergruppen der Ordnung 3. \square

Vergleiche [New62, Thm. 1].

6.2 Die Untergruppe der dritten Potenz

Proposition 6.7. *Es gilt*

$$\Gamma^3 = \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, U) \equiv 0 \right\}.$$

Insbesondere ist U nicht in Γ^3 enthalten.

Beweis. Ist $A \in \Gamma^3$, dann gibt es $B_0, B_1, \dots, B_n \in \Gamma$, $n \geq 0$, so daß $A = B_0^3 B_1^3 \dots B_n^3$ gilt. Da $A \mapsto e(A, U)$ ein Homomorphismus ist, gilt

$$e(A, U) \equiv \sum_{k=0}^n e(B_k^3, U) \equiv \sum_{k=0}^n 3e(B_k, U) \equiv 3 \sum_{k=0}^n e(B_k, U) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Es gilt $e(U, U) \equiv 1$, also ist U nicht in Γ^3 enthalten. Weiter ist $V = V^3$, also liegt V in Γ^3 . Da Γ^3 ein Normalteiler ist, enthält es auch die dazu konjugierten Elemente UVU^2 und U^2VU .

Damit sind die in Kapitel 5.5 errechneten Erzeuger der Kommutatoruntergruppe $VUVU^2$ und VU^2VU in Γ^3 , also gilt $\Gamma' \subset \Gamma^3$.

Jedes $A \in \Gamma$ mit $e(A, U) \equiv 0$ ist in $\Gamma' \cup V\Gamma'$ und damit in Γ^3 enthalten. □

Proposition 6.8. $\{I, U, U^2\}$ ist ein Nebenklassenvretersystem von Γ/Γ^3 . Entsprechend hat Γ^3 den Index 3 in Γ .

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, U) \equiv 0 \right\} \cup \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, U) \equiv 1 \right\} \cup \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, U) \equiv 2 \right\} \\ &= \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, U) \equiv 0 \right\} \cup \left\{ A \in \Gamma \mid e(U^2 A, U) \equiv 0 \right\} \cup \left\{ A \in \Gamma \mid e(UA, U) \equiv 0 \right\} \\ &= \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, U) \equiv 0 \right\} \cup U \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, U) \equiv 0 \right\} \cup U^2 \left\{ A \in \Gamma \mid e(A, U) \equiv 0 \right\} \\ &= \Gamma^3 \cup U\Gamma^3 \cup U^2\Gamma^3. \end{aligned}$$

Da U nicht in Γ^3 enthalten ist, gilt für die letzte Vereinigung Disjunktheit. □

Proposition 6.9. *Der Graph F , der (mit Bemerkung 1.3) durch*

$$V(F) = \{[I]_3, [I]_2, [U]_2, [U^2]_2\} \text{ und } E_+(F) = \{I, U, U^2\}$$

gegeben ist, ist ein spezieller Fundamentalbereich für die Operation von Γ^3 auf G^ (siehe Abbildung L).*

Beweis. Wegen $E_+(F) = \{I, U, U^2\}$ gelten (FUN2) und (FUN3). Sicher ist F zusammenhängend, (FUN1), (SPF1). Die Kante I liegt nach Definition in F , (SPF2). In $K_3 \cap V(F)$ liegt nur die Ecke $[I]_3$. Diese hat Valenz 3 in F , also gelten (SPF3) und Eigenschaft (*). □

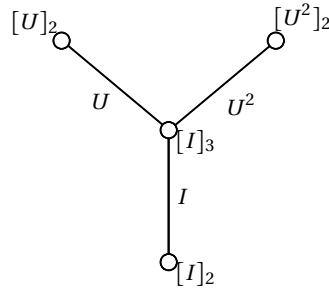


Abbildung L: Ein spezieller Fundamentalbereich für Γ^3 .

Satz 6.10. Γ^3 ist das freie Produkt der Untergruppen der Ordnung 2, die von V , UVU^2 und U^2VU erzeugt werden.

Beweis. Die Ecken $[I]_2$, $[U]_2$ und $[U^2]_2$ haben unter der Operation von Γ die Stabilisatoren $\langle V \rangle$, $\langle UVU^2 \rangle$ respektive $\langle U^2VU \rangle$. Die Elemente V , UVU^2 und U^2VU liegen in Γ^3 , sind also die nach Proposition 5.10 zu $[I]_2$, $[U]_2$ und $[U^2]_2$ eindeutig bestimmten Elemente der Seitenpaarung, die diese Ecken in F lassen.

Die Seitenpaarung S zu F ist also $\{V, UVU^2, U^2VU\}$. Nach Satz 5.25 ist Γ^3 dann das freie Produkt der Untergruppen der Ordnung 2, die von V , UVU^2 und U^2VU erzeugt werden. \square

Vergleiche [New62, Theorem 2].

6.3 Normalteiler, die Elemente endlicher Ordnung enthalten

Ist Λ ein Normalteiler in Γ , der V enthält, dann liegen auch UVU^2 und U^2VU als zu V konjugierte Elemente in Λ . Also gilt $\Lambda \supset \Gamma^3$. Alle Elemente von Γ , die nicht in Γ^3 enthalten sind, liegen in $\Gamma^3\{U, U^2\}$. Ist Λ ungleich Γ^3 , dann ist also $U \in \Lambda$ und es gilt $\Lambda = \Gamma$.

Ist analog Λ ein Normalteiler in Γ , der U enthält, dann liegt VUV , da es zu U konjugiert ist, in Λ . Also gilt $\Lambda \supset \Gamma^2$. Elemente von Γ , die nicht in Γ^2 liegen, sind in Γ^2V . Ist Λ nicht gleich Γ^2 , dann ist also $V \in \Lambda$ und damit $\Lambda = \Gamma$.

Nach Satz 4.13 sind Elemente endlicher Ordnung in Γ zu V , U oder U^2 konjugiert. Damit ist der in Kapitel 5.4 angedeutete, folgende Satz bewiesen:

Satz 6.11. Die einzigen Normalteiler in Γ , die Elemente endlicher Ordnung enthalten, sind Γ , Γ^2 und Γ^3 .

Vergleiche [New64, Lemma 2].

6.4 Höhere Potenzen

Wenn n einen von Null verschiedenen Rest modulo 6 hat, gliedern sich die Gruppen Γ^n in drei Fälle.

- Für $n \equiv 1 \pmod{6}$ sind $V^n = V$ und $U^n = U$ in Γ^n enthalten. Es gilt $\Gamma^n = \Gamma$.
- Für $n \equiv 2 \pmod{6}$ ist $U^n = U^2$ in Γ^n . Da n durch zwei teilbar ist, gilt $\Gamma^n \subset \Gamma^2$. Mit Satz 6.11 folgt also $\Gamma^n = \Gamma^2$.
- Für $n \equiv 3 \pmod{6}$ ist $V^n = V$ in Γ^n und es gilt $\Gamma^n \subset \Gamma^3$, da drei n teilt. Also folgt $\Gamma^n = \Gamma^3$ mit Satz 6.11.
- Für $n \equiv 4 \pmod{6}$ ist $U^n = U^4 = U$ in Γ^n . Da n durch zwei teilbar ist, gilt $\Gamma^n \subset \Gamma^2$. Ebenfalls mit Satz 6.11 folgt $\Gamma^n = \Gamma^2$.
- Für $n \equiv 5 \pmod{6}$ sind $V^n = V$ und $U^n = U^2$ in Γ^n enthalten, also gilt ebenfalls $\Gamma^n = \Gamma$.

Die Untergruppe Γ^6 enthält weder V noch U . Nach der Folgerung aus Satz 5.29 ist sie frei erzeugt. Für $n \equiv 0 \pmod{6}$ mit $n > 0$ ist $\Gamma^n \subset \Gamma^6$. Ebenfalls nach dieser Folgerung ist also auch dieses eine freie Untergruppe der Modulgruppe. Die Untergruppen Γ^{6n} mit $n \geq 1$ haben großen Index in Γ . Bekannt ist lediglich $[\Gamma : \Gamma^6] = 216$. Für $2 \leq n < 72$ ist $[\Gamma : \Gamma^{6n}]$ unbekannt, aber schon Γ^{12} hat einen Index, der größer oder gleich $6^3 2^{37}$ ist. Für $n \geq 72$ schließlich hat Γ^{6n} sogar unendlichen Index in Γ . Für all diese Aussagen sei auf [New62] verwiesen.

7 Existenz des Farey-Symbols

Ziel des folgenden Kapitels ist der Beweis der Existenz des in [Kul91] beschriebenen Farey-Symbols mit den Methoden dieser Arbeit.

Die Menge der Stern-Brocot-Brüche ungleich $\frac{1}{0}$ steht in bijektiver Korrespondenz zu \mathbb{Q} . Die natürliche vollständige Anordnung auf \mathbb{Q} soll verwendet werden, um die terminalen Ecken eines speziellen Fundamentalbereiches anzuordnen. Nur für dieses Kapitel also sollen Anordnung und additive Gruppeneigenschaften von \mathbb{Q} auf $\mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{0}\}$ übertragen werden.

Lemma 7.1. Seien $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{0}\}$ benachbart mit $ad - bc = 1$ und (SIG+). Dann gilt $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Beweis. Es ist $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd} = \frac{1}{cd}$. Aus (SIG+) folgt $|c+d| = |c|+|d|$ und damit $cd \geq 0$. Wegen $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \neq \frac{1}{0}$ gilt sogar $cd > 0$. Also ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. \square

Definition. Eine **verallgemeinerte Farey-Folge** ist eine aufsteigend geordnete Folge

$$\frac{-1}{0}, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}, \frac{1}{0}$$

von Stern-Brocot-Brüchen, die $\frac{0}{1}$ enthält und deren aufeinanderfolgende Glieder benachbart sind. Paare $\dots, \frac{b}{d}, \frac{a}{c}, \dots$ aufeinanderfolgender Glieder in dieser Folge heißen **Intervalle**.

Ein **Farey-Symbol** ist eine verallgemeinerte Farey-Folge zusammen mit einer Abbildung, die jedem Intervall das Symbol \circ , das Symbol \bullet oder ein numerisches Symbol $1, 2, \dots$ zuordnet. Dabei treten die numerischen Symbole in Paaren auf, das heißt es gibt entweder Null oder zwei Intervalle, die dieses Symbol tragen.

Zur Untergruppe $\Lambda \subset \Gamma$ endlichen Indexes sei F ein Fundamentalbereich, der (SPF1) bis (SPF3), aber nicht notwendigerweise die Eigenschaft $(*)$ erfüllt. (Dies wird zum Beweis von Proposition 7.9 benötigt). Ein solcher existiert, da etwa ein spezieller Fundamentalbereich zu Λ existiert (Satz 5.6). Später werden wir für F dann $(*)$ fordern.

Die Abbildung κ aus der Menge der terminalen Ecken in F nach $E_+(G^*)$ ordne einem terminalen $[A]_2$ dasjenige von A und AV zu, welches nicht in F enthalten ist. Einem terminalen $[A]_3$ ordne sie dasjenige aus A , AU , AU^2 zu, welches in F enthalten ist.

Sei T das Bild von κ , also die Menge aller $\kappa(\delta)$ und $\kappa(\tau)$ für terminale δ, τ in F .

Beispiel 7.2. Ist $\Lambda = \Gamma$, dann gilt $V(F) = \{[I]_2, [I]_3\}$ und $E_+(F) = \{I\}$. Die Abbildung κ ist dann durch $\kappa([I]_2) = V$ und $\kappa([I]_3) = I$ gegeben.

Lemma 7.3. *Gibt es eine Kante $A \in E_+(F)$, so daß $[A]_2$ und $[A]_3$ beide terminal sind, dann ist $\Lambda = \Gamma$.*

Beweis. Die einzigen Kanten in F , die die Ecken $[A]_2$ und $[A]_3$ als Anfangs- oder Endpunkt haben sind A und \bar{A} . Jeder Pfad in F , der eine dieser Ecken als Anfangspunkt hat, besucht an Kanten höchstens A und \bar{A} . Da F wegen (FUN1) zusammenhängend ist, gilt $E_+(F) = \{A\}$. Wegen (SPF2) ist I in $E_+(F)$ enthalten, also ist $A = I$. In $K_3 \cap V(F)$ liegt genau eine Ecke, also ist $(*)$ erfüllt und damit F ein spezieller Fundamentalbereich zu Λ . Da $[I]_2$ und $[I]_3$ unter Λ höchstens in sich selbst abgebildet werden können, ist die zugehörige Seitenpaarung $S = \{V, U, U^2\}$. Nach Satz 5.25 gilt dann $\Lambda \cong \langle V \rangle * \langle U \rangle$, also $\Lambda = \Gamma$. \square

Lemma 7.4. *Sei $A \in T$, dann ist $A = \kappa([A]_2)$ oder $A = \kappa([A]_3)$.*

Beweis. Ist $A = \kappa([B]_2)$ für ein $B \in \Gamma$, dann ist $A \in \{B, BV\}$ und damit $[B]_2 = [A]_2$. Ist $A = \kappa([B]_3)$ für ein $B \in \Gamma$, dann ist $A \in \{B, BU, BU^2\}$ und damit $[B]_3 = [A]_3$. \square

Proposition 7.5. *Jedes $A \in T$ erfüllt (SIG+).*

Beweis. Ist $A \in \{I, V\}$, dann ist nichts zu zeigen. Von den Kanten A und AV erfüllt nach Proposition 3.15 und Bemerkung 3.12 genau eine (SIG+) und die andere (SIG-). Sei φ der eindeutig bestimmte injektive Pfad im Baum F , der $[I]_2$ mit $[A]_2$ verbindet (Proposition 1.15). Nach Lemma 3.24 liegt genau diejenige Kante von A und AV , welche (SIG+) erfüllt, nicht in $E(\varphi)$.

Ist $A = \kappa([A]_2)$, dann ist A nach Definition nicht in F und damit nicht in $E(\varphi)$. Ist $A = \kappa([A]_3)$, dann ist $t(A) = [A]_3$ eine terminale Ecke von F . Nach Lemma 1.11 muß $[A]_3$ dann, wenn es von φ besucht wird, der Anfangs- oder Endpunkt von φ sein. Diese liegen beide in K_2 , also wird $[A]_3$ und damit A nicht von φ besucht. Wegen $A \notin E(\varphi)$ erfüllt A also (SIG+). \square

Proposition 7.6. *Die Abbildung κ ist injektiv.*

Beweis. Ein A in T ist Bild von entweder $[A]_2$ oder $[A]_3$ unter κ (Lemma 7.4). Sind sowohl $[A]_2$ als auch $[A]_3$ terminale Ecken in F , dann ist nach Lemma 7.3 $\Lambda = \Gamma$ und damit κ injektiv (Beispiel 7.2). Ansonsten ist nur eines von $[A]_2$ und $[A]_3$ terminal in F . \square

Erinnerung: Die Abbildungen o_G und t_G sind die Anfangs- und Endpunkte in G .

Lemma 7.7. *Es gibt genau ein $A \in T$ mit $o_G(A) = \frac{1}{0}$.*

Beweis. Alle $A \in \Gamma$ mit $o_G(A) = \frac{1}{0}$ sind von der Form $R^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Damit A (SIG+) erfüllen kann, was nach Proposition 7.5 für Elemente aus T gilt, muß $k \geq 0$ gelten. Nach (SPF2) ist $I = R^0$ und damit $[R^0]_2$ in F enthalten. Da F endlich ist, gibt es ein maximales $k \geq 0$ mit $[R^k]_2 \in V(F)$.

Ist $[R^k]_2$ terminal, dann ist R^k , da es (SIG+) erfüllt, nicht im injektiven Pfad, der $[I]_2$ mit $[R^k]_2$ verbindet (Lemma 3.24) und damit nicht in F enthalten. Also ist es das Bild von $[R^k]_2$ unter κ und damit in T . Ist $[R^k]_3$ terminal und $[R^k]_2$ nicht terminal, dann ist R^k als Verbindung von $[R^k]_2$ und $[R^k]_3$ in $E_+(F)$ enthalten und damit das Bild von $[R^k]_3$ unter κ . Sind $[R^k]_2$ und $[R^k]_3$ beide terminal, dann ist nach Lemma 7.3 $\Lambda = \Gamma$ und damit $R^0 = I$ das gesuchte, eindeutig bestimmte A (Beispiel 7.2). Wären $[R^k]_2$ und $[R^k]_3$ beide nicht terminal, dann hätte $[R^k]_3$ Valenz 3 in F . Damit läge die Kante $R^k U^2$ und damit die Ecke $[R^k U^2]_2 = [R^k U^2 V]_2 = [R^{k+1}]_2$ in F , was der Maximalität von k widerspräche.

Für $0 \leq k' < k$ liegen $[R^{k'}]_2$ und $[R^{k'}]_3$ nach Beispiel 3.41 im Pfad, der $[I]_2$ mit $[R^k]_2$ in F verbindet. Bis auf $[R^0]_2$ sind sie ungleich dem Anfangs- und Endpunkt des Pfades. Diese können also nicht terminal in F sein. Ist $[R^0]_2 = [I]_2$ terminal in F , dann ist $\kappa([I]_2) = V$, dessen Anfangspunkt in G der Bruch $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{0}$ ist. Insgesamt folgt, daß das gesuchte Element aus T eindeutig bestimmt ist. \square

Lemma 7.8. *Es gibt genau ein $A \in T$ mit $t_G(A) = \frac{0}{1}$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu Lemma 7.7, indem R durch L ersetzt wird. \square

Proposition 7.9. *Sei $\frac{p}{q} \in o_G(E_+(F)) \cup t_G(E_+(F))$, dann gibt es genau ein $A \in T$ mit $o_G(A) = \frac{p}{q}$ und genau ein $B \in T$ mit $t_G(B) = \frac{p}{q}$.*

Beweis. Sei zuerst $\frac{p}{q} = o_G(C)$ für ein $C \in E_+(F)$. Dann gilt $o_G(C) = C \frac{1}{0} = \frac{p}{q}$, also $C = \begin{bmatrix} p & m \\ q & n \end{bmatrix}$ mit geeigneten $m, n \in \mathbb{Z}$.

Der Graphenautomorphismus C^{-1} bildet F in einen Fundamentalbereich ab, der zusammenhängend ist, (SPF1), $C^{-1}C = I$ enthält, (SPF2), und dessen Ecken aus K_3 Valenz ungleich 2 haben, (SPF3).

Also ist auch $C^{-1}F$ ein Fundamentalbereich für Λ , der (SPF1) bis (SPF3) erfüllt (jedoch $(*)$ im allgemeinen nicht).

Nach Lemma 7.7 gibt es genau ein $A' \in C^{-1}T$ mit $o_G(A') = \frac{1}{0}$. Es ist $o_G(CA') = Co_G(A') = C \frac{1}{0} = \frac{p}{q}$. Die Kante $A := CA' \in T$ erfüllt also $o_G(A) = \frac{p}{q}$.

Nach der Existenz soll die Eindeutigkeit von A gezeigt werden. Sei $A \in T$ irgendeine Kante mit $o_G(A) = \frac{p}{q}$. Da $C^{-1}\frac{p}{q} = \frac{1}{0}$ ist, gilt $o_G(C^{-1}A) = C^{-1}o_G(A) = \frac{1}{0}$. Da $C^{-1}A$ in $C^{-1}T$ enthalten ist, folgt $C^{-1}A = A'$ und damit $A = CA'$. Also ist A eindeutig bestimmt.

Mit einem $C \in E_+(F)$, das $\frac{p}{q} = t_G(C)$ erfüllt, erfolgt der Beweis für Existenz und Eindeutigkeit von B analog – mit der Ausnahme, daß Lemma 7.8 verwendet wird. \square

Wegen $E_+(G) = E_+(G^*) = \Gamma$ kann T (mit Bemerkung 1.3) als Subgraph \bar{T} von G mit $V(\bar{T}) := o_G(T) \cup t_G(T)$ und $E_+(\bar{T}) := T$ aufgefasst werden. Da Λ endlichen Index in Γ hat, ist F endlich (Bemerkung 5.2). Also ist auch \bar{T} endlich. Wegen den Lemmata 7.7 und 7.8 liegen $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ in $V(\bar{T})$.

Proposition 7.10. *$\bar{T} \subset G$ ist eine disjunkte Vereinigung von Zykeln.*

Beweis. Sei X eine Zusammenhangskomponente von \bar{T} . Zu $\frac{p}{q} \in V(T)$ gibt es nach Proposition 7.9 genau ein $A \in E_+(\bar{T})$ mit $o_G(A) = \frac{p}{q}$ und genau ein $B \in E_+(\bar{T})$ mit $t_G(B) = \frac{p}{q}$.

Fall I. Ist $t_G(A) = o_G(B) = \frac{p'}{q'}$, dann gibt es ebenfalls nach Proposition 7.9 außer A und B keine Kanten in \bar{T} , die $\frac{p}{q}$ oder $\frac{p'}{q'}$ als Anfangs- oder Endpunkt besitzen. Also ist $V(X) = \left\{ \frac{p}{q}, \frac{p'}{q'} \right\}$ und $E_+(X) = \{A, B\}$, was bedeutet, daß X ein 2-Zykel ist.

Fall II. $t_G(A) \neq o_G(B)$. Zu einem $\frac{p'}{q'} \in V(X)$ seien $A', B' \in T$ die eindeutig bestimmten Kanten mit $o_G(A') = \frac{p'}{q'}$ und $t_G(B') = \frac{p'}{q'}$. Für diese gilt $t_G(A') \neq o_G(B')$, da $\frac{p'}{q'}$ sonst Fall I erfüllen würde. Insbesondere folgt daraus, daß zwei Ecken aus $V(\bar{T})$ durch höchstens ein Paar aus einer Kante und ihrer Umgekehrten verbunden sind. Als Subgraph von \bar{T} ist X endlich. Nach Proposition 1.14 folgt dann, daß X ein Zykel ist. \square

Proposition 7.11. *Der Subgraph $\bar{T} \subset G$ ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei X eine Zusammenhangskomponente von $\bar{T} \subset G$. Sei E die Menge der Ecken von X . Als Teilmenge von Q aufgefasst sei erneut die Anordnung von Q auf die Stern-Brocot-Brüche aus E , die nicht $\frac{1}{0}$ sind, übertragen.

Sei $\frac{b}{a}$ in E maximal und sei $B \in T$ die eindeutig bestimmte Kante mit $t_G(B) = \frac{b}{a}$ (Proposition 7.9). Dann ist $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ für ein geeignetes $\frac{a}{c} \in Q$. Wäre dieses ungleich $\frac{1}{0}$, dann gälte, da $B \in T$ nach Proposition 7.5 (SIG+) erfüllt und $ad - bc = 1$ ist, nach Lemma 7.1 $\frac{a}{c} > \frac{b}{a}$, was der Maximalität von $\frac{b}{a}$ widerspräche. Also ist die Ecke $\frac{a}{c} = \frac{1}{0}$ in jeder Zusammenhangskomponente von X enthalten. Es folgt: $X = \bar{T}$ ist zusammenhängend. \square

Satz 7.12. *\bar{T} ist ein Zykel in G .*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Propositionen 7.10 und 7.11. \square

Ab hier erfülle F wieder die Eigenschaft $(*)$, sei also ein spezieller Fundamentalbereich zu Λ . Sei S die Seitenpaarung dazu.

Der Zykel $\bar{T} \subset G$ kann nun in der Form eines Farey-Symbols geschrieben werden. Sei n die Anzahl der Ecken von \bar{T} minus 2.

Sei $\varphi : Z_{n+1} \rightarrow \bar{T}$ ein Isomorphismus mit $\varphi_V(n+1) = \frac{1}{0}$ und $\varphi_E(E_+(Z_{n+1})) \subset \overline{E_+(G)}$. Sei $\frac{p_k}{q_k} := \varphi_V(k)$, $q_k > 0$, für $k = 0, \dots, n$. Da $\overline{\varphi_E((k, k+1))} = \begin{bmatrix} p_{k+1} & p_k \\ q_{k+1} & q_k \end{bmatrix}$, $k = 0, \dots, n$, in T liegt, erfüllt es (SIG+) und $p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k = 1$. Nach Lemma 7.1 ist die Folge

$$\frac{-1}{0}, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}, \frac{1}{0}$$

dann aufsteigend geordnet. Weiter gilt $ad - bc = 1$ für aufeinanderfolgende Glieder

$\dots, \frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \dots$. Dies gilt auch für $\frac{-1}{0}$ und $\frac{1}{0}$, da $\overline{\varphi_E((n+1, 0))} = \begin{bmatrix} p_0 & -1 \\ q_0 & 0 \end{bmatrix}$ und $\overline{\varphi_E((n, n+1))} =$

$\begin{bmatrix} 1 & p_n \\ 0 & q_n \end{bmatrix}$ ist. Schließlich ist $\frac{0}{1} \in V(\bar{T})$ in der Folge.

Die obige Folge ist also eine verallgemeinerte Farey-Folge. Paare $\dots, \frac{b}{d}, \frac{a}{c}, \dots$ aufeinanderfolgender Glieder darin wurden Intervalle genannt. Ihnen entsprechen bijektiv die Elemente $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ aus T , welche wiederum unter der injektiven Abbildung κ den terminalen Ecken aus F eins zu eins entsprechen.

Sei x die terminale Ecke zum Intervall $\dots, \frac{b}{d}, \frac{a}{c}, \dots$. Dem Intervall werde nun ein Symbol angeheftet, das repräsentiert, wie sich diese Ecke unter der Seitenpaarung S verhält. Nach Satz 5.17 gibt es (mit dortigen Bezeichnungen) genau ein $A \in S_2 \dot{\cup} S'_3 \dot{\cup} S_f$ mit $Ax \in F$. Ist $A \in S_2$, dann werde dem Intervall das Symbol \circ angeheftet. Ist $A \in S'_3$, dann werde dem Intervall das Symbol \bullet angeheftet. Die Symbole \circ und \bullet sagen aus, daß die Ecke x unter S auf sich selbst abgebildet wird und ein Fixpunkt der Ordnung 2 beziehungsweise 3 ist. Liegt A in S_f , dann ist $x = \delta$ für ein $\delta \in K_2$ und es gibt genau ein $\delta' \in K_2 \cap V(F)$, $\delta' \neq \delta$, mit $A\delta = \delta'$. Dieser terminalen Ecke δ' entspricht genau ein anderes Intervall in der Folge. Beiden werde ein für dieses Paar von Intervallen eindeutiges numerisches Symbol zugeordnet, welches aussagt, daß diese Ecken unter S ineinander abgebildet werden.

Beispiel 7.13. Für $\Lambda = \Gamma$ ist $V(F) = \{[I]_2, [I]_3\}$ und $E_+(F) = \{I\}$ ein spezieller Fundamentalbereich. Die Seitenpaarung S ist durch $\{V, U, U^2\}$ gegeben. Wie in Beispiel 7.2 gesehen, gilt $\kappa([I]_2) = V$ und $\kappa([I]_3) = I$. Die Ecken von I und V in G bilden $\frac{-1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ als verallgemeinerte Farey-Folge. Das Intervall $\frac{-1}{0}, \frac{0}{1}$ entspricht $V \in T$ und damit $[I]_2$, welches unter $V \in S_2$ fix gelassen wird. Das Intervall $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ entspricht $I \in T$ und damit der terminalen Ecke $[I]_3$, welche unter $U \in S_3$ fix gelassen wird. Ein Farey-Symbol zu $\Lambda = \Gamma$ ist also durch

$$\left\{ \underbrace{\frac{-1}{0}, \frac{0}{1}}_{\circ}, \frac{1}{0} \right\}_{\bullet}$$

gegeben.

Beispiel 7.14. Für die Kommutatorgruppe $\Lambda = \Gamma'$ wurden in Kapitel 5.5 bereits der spezielle Fundamentalbereich $F \subset G^*$ mit

$$V(F) := \{[I]_2, [I]_3, [V]_3, [U]_2, [U^2]_2, [VU]_2, [VU^2]_2\},$$

$$E_+(F) := \{I, V, U, U^2, VU, VU^2\}$$

und die Seitenpaarung $S = \{VUVU^2, UVU^2V, VU^2VU, U^2VUV\}$ bestimmt. Die terminalen Ecken von F sind $[U]_2$, $[U^2]_2$, $[VU]_2$ und $[VU^2]_2$. Unter κ werden diese auf die Kanten UV , U^2V , VUV respektive VU^2V abgebildet.

Die Anfangs- und Endpunkte dieser Kanten in G liegen alle in $\{\frac{-1}{0}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$. Das Intervall $\frac{-1}{0}, \frac{-1}{1}$ entspricht dabei $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = VUV$, was unter UVU^2V auf

$$UVU^2VUV = U \in [U]_2$$

abgebildet wird, welches wiederum $UV = L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in T$ und damit dem Intervall $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ entspricht. Die so gepaarten Intervalle sollen mit dem Symbol 1 versehen werden. Das Intervall $\frac{-1}{1}, \frac{0}{1}$ entspricht der Kante $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = VU^2V$, welche unter U^2VUV auf

$$U^2VUVVU^2V = U^2 \in [U^2]_2$$

abgebildet wird. Diese Ecke wird unter κ auf die Kante $U^2V = R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in T$ abgebildet, welche dem Intervall $\frac{1}{1}, \frac{1}{0}$ entspricht. Ein Farey-Symbol für die Kommutatoruntergruppe ist also durch

$$\left\{ \underbrace{\frac{-1}{0}, \frac{-1}{1}}_1, \underbrace{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}}_2, \underbrace{\frac{1}{1}, \frac{1}{0}}_1, \underbrace{\frac{1}{0}}_2 \right\}$$

gegeben.

Weitere Beispiele für Farey-Symbole sind

$$\left\{ \frac{-1}{0}, \underbrace{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}}_{\bullet \bullet} \right\}.$$

für Γ^2 und

$$\left\{ \frac{-1}{0}, \underbrace{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}}_{\circ \circ \circ} \right\}.$$

für Γ^3 .

Aus einem Farey-Symbol kann die Seitenpaarung S nahezu direkt abgelesen werden: Aus jedem Intervall $\dots, \frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \dots$ werde die zugehörige Kante $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ konstruiert. Ist diese mit dem Symbol \circ versehen, dann ist $[A]_2$ Fixpunkt von einem $B \in S_2$, welches mittels Lemma 5.18 ermittelt werden kann. Ist das Intervall mit \bullet versehen, so ist $[A]_3$ Fixpunkt von einem $B \in S_3$, welches mittels Lemma 5.19 ermittelt werden kann. Sind A und A' die Kanten zweier mit einem numerischen Symbol versehener Intervalle, dann werden $[A]_2$ und $[A']_2$ unter einem $B \in S_f$ aufeinander abgebildet, welches mittels Lemma 5.20 errechnet werden kann (A und A' erfüllen sogar bereits (SIG+)). Die so errechneten Elemente sind gerade eine maximale Teilmenge von S , die zu keinem Element das Inverse enthält. Satz 5.25 gibt dann die Struktur von Λ als Produkt dieser Erzeuger an.

Das Farey-Symbol ist eine sehr kompakte Schreibweise für den speziellen Fundamentalbereich und seine Seitenpaarung. Auch wenn die in dieser Arbeit gezeigte Methode geeignet ist, die Existenz des Farey-Symbols zu zeigen, so ist sie für die Berechnung desselben zu umständlich. Ein Algorithmus, der zur Berechnung lediglich einen Mitgliedschaftstest für Elemente der Untergruppe benötigt, ist in [KL07] zu finden.

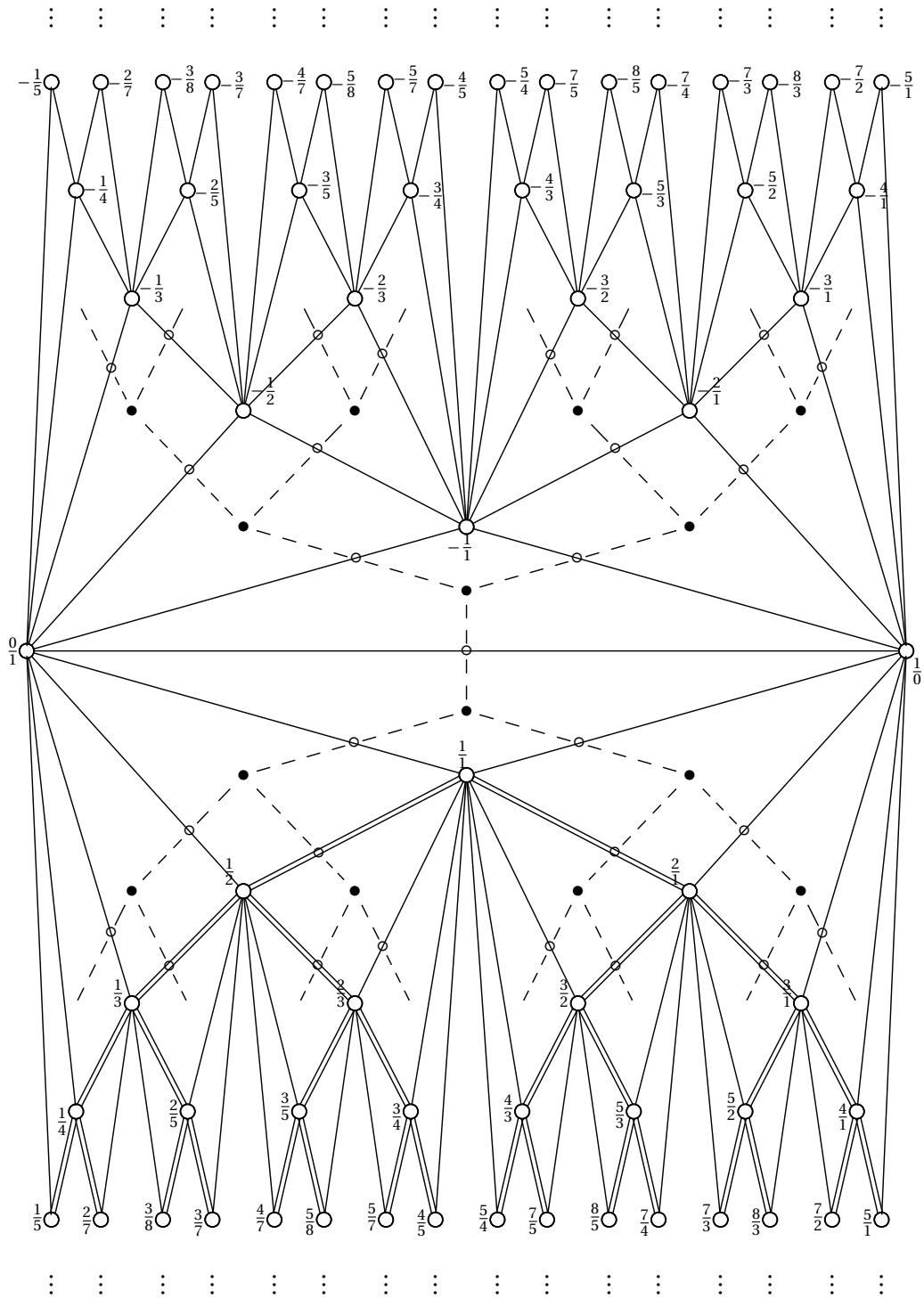


Abbildung M: Das Gesamtbild. Durchgezogene Linien repräsentieren Kanten von G , wobei alle vier Kanten, die zwei Ecken verbinden, zusammgelegt sind. Der Stern-Brocot-Baum als Subgraph von G ist durch doppelte Linien gekennzeichnet. Der Baum G^* ist durch gestrichelte Linien angedeutet, wobei \bullet Ecken aus K_3 und \circ Ecken aus K_2 sind.

Zusammenfassung und Ausblick

In Teil I wurde die Länge des Wortes zu einem Element

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

der Modulgruppe mit seinen Matrixkoeffizienten über die Formel

$$D_L(I, A) = 2 \left(N_L \left(\frac{|a| + |b|}{|c| + |d|} \right) - 1 \right) + x - y$$

mit von der Signatur von A^t und A abhängigen $x, y \in \{0, 1\}$ in Beziehung gesetzt (Folgerung aus Satz 3.38). Eine effiziente Methode zur Berechnung des N_L -Werts und damit der Wortlänge ist der additive euklidische Algorithmus aus Kapitel 3.6.

Im zweiten Teil konnte die Theorie Kulkarnis über unabhängige Erzeuger von Untergruppen auf arithmetisch-graphentheoretischem Wege nachvollzogen und auf einige klassische Untergruppen angewendet werden.

Die obige Formel aus Teil I erlaubt, die Wortlänge eines Gruppenelements aus den Matrixkoeffizienten zu berechnen. Umgekehrt stellt sich die Frage, was man über die Koeffizienten sagen kann, wenn man nur die Wortlänge kennt. So erlauben etwa „Grenzfälle“ wie R^k und $(RL)^k$, $k \geq 0$, allgemeine Abschätzungen für die Beträge der Matrixkoeffizienten.

Eine weitere Frage ist, ob sich die Konstruktion von G und G^* auf $SL_n(\mathbb{Z})$ für $n > 2$ verallgemeinern läßt. Anstelle von Graphen sind dabei höherdimensionale Simplizialkomplexe notwendig [Sou78], denn bereits $SL_3(\mathbb{Z})$ operiert auf keinem Baum fixpunktfrei [Ser80, Chap. I, Par. 6.6, Thm. 16]. So eine solche Verallgemeinerung überhaupt möglich ist, müssen höherdimensionale Entsprechungen zu den Stern-Brocot-Brüchen konstruiert werden. Weiter wäre in diesem Fall zu untersuchen, ob es „spezielle Fundamentalbereiche“ zu Untergruppen von $SL_n(\mathbb{Z})$ gibt.

Die Gruppen $SL_n(\mathbb{Z})$, $n > 2$, aber auch die Modulgruppe selbst halten immer noch ein enormes Maß an offenen Fragen bereit, zu denen die vorliegende Arbeit möglicherweise eine weitere Herangehensweise bietet.

Danksagung

„Nous sommes comme des nains juchés sur des épaules de géants.”

— Bernard de Chartres

Ich danke meiner Familie und meinen Freunden für ihre Unterstützung und Ermutigung über den langen Zeitraum, in dem diese Arbeit entstand.

Tief dankbar bin ich Professor Holdgrün. Durch seine guten Einfälle und seinen prüfenden Blick ist die Arbeit zu etwas geworden, was ich allein nicht hätte erreichen können.

Abel Stolz danke ich für die viele Zeit die er sich genommen hat, meinen unfertigen Ideen zuzuhören und meine Manuskripte gegenzulesen.

Schließlich möchte ich mich besonders bei Dr. Alexander Rahm, meinem Korreferenten, bedanken, der mich überredete diese überarbeitete Fassung zu schreiben.

Berlin, August 2012

Abbildungsverzeichnis

A	Teilerfremdheit geometrisch.	23
B	Ein Beispiel für $(p, q) = (2, 1)$	23
C	Das Parallelogramm $P = (0, 0)(a, c)(p, q)(b, d)$	24
D	Das Parallelogramm Q	25
E	Der 2-Zykel $[A]_2$ mit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	33
F	Der stabile 3-Zykel $[A]_3$ mit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	35
G	Einige Kanten im Graphen G	36
H	Die Umgebung einer Kante A in G^*	40
I	Der Serre'sche Graph	60
J	Ein spezieller Fundamentalbereich für die Kommutatoruntergruppe.	83
K	Ein spezieller Fundamentalbereich für Γ^2	85
L	Ein spezieller Fundamentalbereich für Γ^3	87
M	Das Gesamtbild	95

Literatur

- [Alp93] Roger C. Alperin. $\mathrm{PSL}_2(z) = z_2 * z_3$. *Am. Math. Monthly*, 100:385–386, 1993.
- [Alp99] Roger C. Alperin. Rationals and the modular group. *Am. Math. Monthly*, 106:771–773, 1999.
- [Alp05] Roger C. Alperin. The modular tree of pythagoras. *Am. Math. Monthly*, 112:807–816, 2005.
- [Apo76] Tom M. Apostol. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*. Springer, 1976.
- [Bro61] Achille Brocot. Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode. *Revue Chronométrique*, 3:186–194, 1861.
- [Cas88] Dario Castellanos. The ubiquitous π . *Mathematics Magazine*, 61(2):67–98, April 1988.
- [dH00] Pierre de la Harpe. *Topics in Geometric Group Theory*. The University of Chicago Press, 2000.
- [Euk80] Euklid. *Die Elemente. Buch I - XIII. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer*. Nachdruck: Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1980.
- [GKP89] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 1st edition edition, 1989.
- [JJ98] Gareth A. Jones and J. Mary Jones. *Elementary Number Theory*. Springer, 1998.
- [KF90] Felix Klein and Robert Fricke. *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*. Teubner, 1890.
- [KL07] Chris A. Kurth and Ling Long. Computations with finite index subgroups of $\mathrm{PSL}_2()$ using farey symbols. In *Proceedings of the Second International Congress in Algebra and Combinatorics*, pages 225–242. World Scientific, 2007. <http://arxiv.org/abs/0710.1835>.
- [Kul91] Ravi S. Kulkarni. An arithmetic-geometric method in the study of the subgroups of the modular group. *Amer. J. Math.*, 113:1053–1133, 1991.
- [Kur34] Alexander Kurosch. Die untergruppen der freien produkte von beliebigen gruppen. *Math. Ann.*, 109:647–660, 1934.

- [Min10] H. Minkowski. *Geometrie der Zahlen*. Geometrie der Zahlen. B.G. Teubner, 1910.
- [New62] Morris Newman. The structure of some subgroups of the modular group. *Illinois J. Math.*, 6:480–487, 1962.
- [New64] Morris Newman. Free subgroups and normal subgroups of the modular group. *Illinois J. Math.*, 8:262–265, 1964.
- [New72] Morris Newman. *Integral Matrices*. Academic Press, 1972.
- [Nie48] Jakob Nielsen. Kommutatorgruppen for det frie produkt af cykliske gruppe. *Matematisk Tidsskrift B*, pages 49–56, 1948.
- [Ser80] Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer, 1980.
- [Shi71] Goro Shimura. *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*. Princeton University Press, 1971.
- [Sou78] Christophe Soulé. The cohomology of $SL_3(\mathbb{Z})$. *Topology*, 17:1–22, 1978.
- [Ste58] Moritz Stern. Ueber eine zahlentheoretische funktion. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 55:193–220, 1858.
- [Sti01] John Stillwell. Modular miracles. *Am. Math. Monthly*, 108:70–76, 2001.
- [Vep04] Linas Vepstas. The minkowski question mark, $gl(2, \mathbb{Z})$ and the modular group (expository).
<http://linas.org/math/chap-minkowski.pdf>, 2004. Zum Zeitpunkt dieser Arbeit ist der Artikel unvollendet.
- [Wag70] Klaus Wagner. *Graphentheorie*. Bibliographisches Institut, 1970.