Chapter 1

Feidhmeanna ar na Réaduimhreacha

1.1 Na Réaduimhreacha

Tugtar an t-ainm "réaduimhracha" do na na huimhreacha a léiritear mar dheachúílí.

Mar shampla is réaduimhreacha iad

$$\begin{aligned} 3 &= 3.0\ldots \\ 3\tfrac{1}{4} &= 3.25 \\ -3\tfrac{1}{3} &= -3.333\bar{3} \\ \pi &\approx 3.1415926535\ldots \end{aligned}$$

Úsáidtear an siombail $\mathbb{R}$ chun tacar na réaduimhreacha a chur in iúl. Istigh i $\mathbb{R}$ faightear na *huimhreacha cóimheasta* agus na slánuimhreacha. Deirtear go bhfuil réaduimhir áirithe *cóimheasta* mas féidir í a scríobh san fhoirm $\frac{a}{b}$ ionas gur slánuimhreacha iad a agus b (le $b \neq 0$, ar ndóigh). An nodaireacht seo a leanas atá i bhfeidhm.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: na *slánuimhreacha deimhneacha*, nó na *huimreacha aiceanta*.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$: na *slánuimhreacha*.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : \ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$: na *huimhreacha cóimheasta*
  Nóta faoin nodaireacht seo : ciallaíonn an ráiteas thuas gur iad na huimhreacha den fhoirm $\frac{a}{b}$ do slánuimhreacha a agus b agus $b \neq 0$ na baill den *tacar* $\mathbb{Q}$. Mar shampla, is baill iad na huimhreacha seo a leanas den tacar $\mathbb{Q}$:

  $$2\ \left(= \frac{2}{1}\right),\ \frac{1}{3},\ \frac{7}{5},\ -\frac{20}{3},\ 0\ \left(= \frac{0}{1}\right).$$

- $\mathbb{R}$: na *réaduimhreacha*.
  Ní hionann iad na *réaduimhreacha* agus na huimreacha cóimheasta. Is réaduimhir í gach uimhir cóimheasta, ach tá réaduimhreacha ann nach bhfuil cóimheasta. Mar shampla, feicfimid thíos nach féidir an réaduimhir $\sqrt{2}$ a scríobh san fhoirm $\frac{a}{b}$ le slánuimhreacha a agus b.
- $\mathbb{C}$: na *huimhreacha choimpléascacha*.
  Is uimhir den fhoirm $x + iy$ í *uimhir chompléascach*, le $i^2 = -1$.

Ní bheidh mórán baint againn leis na huimhreacha chompléaschacha ins an chúrsa seo, ach beidh na huimhirchórais eile go léir tábahachtach dúinn. Tá sé riachtanach go mbeidh tuiscint maith againn orthu go léir agus go mbeimid in ann na siombail $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ agus $\mathbb{R}$ a úsáid gan iad a chur trí chéile.

Anois, tá sé in am dúinn ár gcéad teoirim a léiriú.

Teoirim 1.1.1. *Ní uimhir cóimheasta í $\sqrt{2}$.*

Proof. Cuir i gcás go bhfuil $\sqrt{2}$ cothrom le $\frac{p}{q}$, le slánuimhreacha áirithe p agus q ($q \neq 0$) gan comhfactóirí. (Ciallaíonn an ráiteas sin go bhfuil an codán $\frac{p}{q}$ scríofa i dtéarmaí chomh simplí agus is féidir). Ansin, tá ceann amháin de p, q ar a mhéad réidh agus tá an dara ceann corr. Anois

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Longrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Longrightarrow p^2 = 2q^2.$$

Ansin, is ré-uimhirí p^2 agus dá bhrí sin tá p réidh chomh maith. Ach má tá p réidh, is iolraí de 4 é p^2 (smaoinigh ar seo). Ach más iolraí de 4 é p^2, is féidir linn a scríobh $p^2 = 4p'$ do slánuimhir éigin p'. Ansin

$$p^2 = 2q^2 \Longrightarrow 4p' = 2q^2 \Longrightarrow q^2 = 2p'.$$

Ach ansin is ré-uimhir í q^2, agus dá bhrí sin is ré-uimhir í q. Níl aon chiall le seo, áfach, mar tá sé socraithe againn cheana go bhfuil ceann amháin de p agus q réidh, ar a mhéad.

An t-aon cinneadh atá fágtha dúinn ansin ná go raibh an samhlú go bhfuil $\sqrt{2}$ cóimheasta mícheart sa chéad áit. $\square$

Tá sé cruthaithe thuas againn gur uimhir *éagóimheasta* í $\sqrt{2}$. Samplaí eile de huimhreacha éagóimheasta iad $\sqrt{5}$ agus π. Tá a lán uimhreacha cóimheasta agus éagóimheasta i measc na réaduimhreacha, agus tá siad meascaithe le chéile ar fud an uimhirlíne.

Tá sé deacair go leor a léiriú go bhfuil an uimhir π éagóimheasta, ach is féidir réasúnaíocht cosúil le cruthú Teoirim 1.1.1 a úsáid chun taispeáint nach bhfuil na huimhreacha $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ srl. cóimheasta.

Fadhb 1.1.2.

1. *Cruthaigh go bhfuil an uimhir $\sqrt[3]{2}$ éagóimheasta.*
2. *Cruthaigh go bhfuil an uimhir $\sqrt{5}$ éagóimheasta.*

Ordghaol na Réaduimhreacha

Más réaduimhreacha iad x agus y, deirtear go bhfuil x *níos lú ná* y (scríobh $x < y$) má tá x ar an taobh chlé de y ar an uimhir líne. Is féidir $x \leqslant y$ a scríobh má tá x níos lú ná y nó má tá x cothrom le y. Tá an ciall céanna ag na ráiteasaí seo thíos.

- $x < y$
- $y > x$
- $x \leqslant y$
- $y \geqslant x$

Má tá $x \leqslant y$ agus $y \leqslant x$ do na réaduimhreacha céanna x agus y, ciallaíonn sé seo go bhfuil $x = y$.

Tá an ordghaol céanna i bhfeidhm i $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ agus $\mathbb{N}$, ach níl ordghaol ar bith i bhfeidhm i $\mathbb{C}$. 'Sé sin, más uimhreacha coimpléascacha iad z_1 agus z_2 (agus nach réaduimhreacha iad), níl aon ciall ag baint leis an ráiteas $z_1 \leqslant z_2$ nó ráiteas ar bith den fhoirm sin.

Feidhmeanna

Cuir i gcás gur tacair éigin iad A agus B. Tá seans ann gur réaduimhreacha iad na baill de B ach is cuma. Tá seans ann freisin gur ionann iad A agus B ach is cuma.

Sainmhíniú 1.1.3. *Ciallaíonn an ráiteas gur feidhm í f ó A go B (scríofa $f : A \to B$ go bhfuil ball áirithe $f(x)$ de B nascaithe le gach ball x den tacar A.*

Is féidir feidhm ó A go B a shamhlú mar feithicil a sheolann gach ball den tacar A go ball áirithe den tacar B. Ins an sainmhíniú seo, is cuma an bhfuil gach ball de B nascaithe le ball éigin de A nó nach bhfuil. Má tá áfach, deirtear go bhfuil an feidhm f *barrtheilgeach*.

Sampla 1.1.4. *Más é A an tacar a chuimsíonn na mic léinn go léir i OÉ Gaillimh, agus más é B an tacar de na chursaí go léir atá ar fáil in OÉ Gaillimh, tá feidhm $f : A \to B$ ann a thugann go gach mac léinn an chúrsa atá á dhéanamh aige no aici. Don feidhm seo, is féidir linn a rá*

f*(Patricia) = Mata agus Oideachas,* f*(Aleisha)= Mata Airgeadais agus Éacnamaíocht,*

agus mar sin de.

Sampla 1.1.5. *Is féidir feidhm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a shainmhíniú mar seo*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{má tá } x \text{ deimhneach} \\ 0 & \text{má tá } x = 0 \\ -1 & \text{má tá } x \text{ diúltach} \end{cases}$$

Tá sé soiléir nach feidhm barrtheilgeach í an f seo, mar níl ina íomhá ach na baill $-1, 1$ agus 0.

Sainmhíniú 1.1.6. *Más feidhm í f ó A go B, glaotar* íomha f *(*$\text{Im}(f)$*) ar an tacar $\{f(x) : x \in A\}$. Is fo-thacar de B í $mathrmIm(f)$.*

Cuimsíonn 'iomhá f na baill de B a "thagann" ó A de réir an fheidhm f.

Sampla 1.1.7. *Is féidir feidhm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a shainmhíiú mar seo :*

$$g(x) = x^2 - 2, \text{ do gach } x \in \mathbb{R}.$$

Ansin mar shampla, is féidir luachanna de g ag pointí áirithe a scríobh. Mar shampla

$$g(2) = 2^2 - 2 = 2, \; g(-2) = (-2)^2 - 2 = 2, \; g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0,$$

agus mar sin de.

Nóta: Tá $x^2 \geqslant 0$ do gach r'eaduimhir x, agus d'a bhrí sin tá $x^2 - 2 \geqslant -2$ do gach réaduimhir x. Ar an taobh eile, más réaduimhir í c le $c \geqslant -2$, is féidir an cothromóid $x^2 - 2 = c$ a réitiú, mar shampla le $x = \sqrt{c+2}$. Ansin tá $g(\sqrt{c+2}) = c$, agus is féidir linn a rá go bhfuil c ins an tacar $\text{Im}(g)$. Cuimsíonn $\text{Im}(g)$ na réaduimhreacha go léir atá $\geqslant -2$. Is féidir an tacar seo a scríobh mar $[-2, \infty)$. Tá an nodaireacht seo go han-tábhachtach sa Chalcalas.

Sainmhíniú 1.1.8. *Tugtar* eatramh *ar fo-thacar de na réaduimhreacha a chuimsíonn píosa cónasctha den uimhirlíne.*

Is féidir le heatramh bheith *cuimsithe* (mar shampla eatramh ó -2 go 3, no *éaguimsuithe*, mar shampla an tacar $[-2, \infty)$. Má tá eatramh cuimsithe, deirtear go bhfuil sé *dúnta* má tá na críochphointí cuimsithe ann, nó oscailte mura bhfuil. Is féidir le eatramh bheith dúnta ar taobh amháin agus oscailte ar an taobh eile. Úsáidtear an nodaireacht speisialta ins na samplaí thíos chun eatraimh oscailte agus dúnta a léiriú.

1. $[1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x \leqslant 3\}$: an eatramh dúnta ó 1 go 3 - is baill iad 1 agus 3 den tacar seo.
2. $(1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\}$: an eatramh oscailte ó 1 go 3 - níl na huimhreacha 1 agus 3 ins an tacar seo, and tá 1.0000001 agus 2.999999 ann.
3. $[1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x < 3\}$: eatramh leath-oscailte ó 1 go 3 - tá 1 ins an tacar seo, ach níl 3 ann.
4. $(1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leqslant 3\}$: eatramh eile leath-oscailte ó 1 go 3 - tá 3 ins an tacar seo, ach níl 1 ann.
5. $(-\infty, 3) = \{x \in \mathbb{R}, x < 3\}$: níl 3 ins an tacar seo, ach tá gach réaduimhir atá níos lú ná 3 ann.

Tabhair aire do na lúibíní cruinn agus cearnacha atá in usáid anseo chun na heatraimh go léir a léiriú. Ciallaíonn lúibín cearnaithe go bhfuil an críochphointe ins an tacar agus lúibín cruinn nach bhfuil.

Is féidir nodaireacht mar "$\cup$" (aontas) agus "$\cap$" (idirmhír) a úsáid chun tacair (eatraimh mar shampla) a chur le chéile agus chun tacair nua a dhéanamh eatarthu.

Sainmhíniú 1.1.9. *Más tacair ar bith iad* A *agus* B*, tá na tacair* $A \cup B$ *agus* $A \cap B$ *sainmhínithe mar a leanas.*

- $A \cup B := \{x : x \in A$ *nó* $x \in B\}$.
  Is ball é x *de* $A \cup B$ *más ball é de* A nó *más ball é de* B.
- $A \cap B = \{x : x \in A$ agus $x \in B\}$.
  Cuimsíonn an tacar $A \cap B$ *na baill amháin atá in* A *agus i* B.