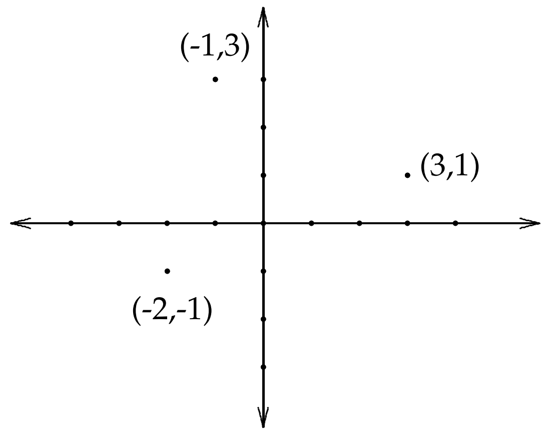
1.2 Graif

Tugtar an t-ainm $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$-dó) don phlána Cairtéasach. Is tacar é an plána seo atá éigríochta agus éaguimisthe, agus léirítear é de ghnáth le péire aiseanna, an X-ais (cothrománach) agus an Y-ais (ceartingearach).

Is féidir pointe ar bith ins an phlána a léiriú ansin le ordphéire de réaduimhreacha, sin an X-chomhordanáid sa chéad áit agus an Y-chomhordanáid sa dara áit.



Tá an plána Cairtéasach (nó *plána chomhordanáideach*) an-tábhachtach agus an úsáideach ar fud na matamaitice. René Descartes a chum é ins an 17ú céad. An tábhacht a bhaineann leis ná go dtugann sé nasc dúinn idir cothromoóidí agus pictiúirí, nó idir an geoiméadracht agus an ailgéabar. Mar shampla, gan an plána, níl ins an ráiteas $x + 2y = 4$ ach cothróimóid. Nuair atá an plána againn áfach, is féidir linn pictiúr a tharraingt de na pointí a shásaíonn an cothromóid, agus an comthromóid a shamhlú mar *líne*. 'Sé sin, tugann an plána chomhordanáideach tuiscint geoiméadrach dúinn faoi rudaí a bhaineann le hailgéabar, agus a mhalairt. Ní amháin cothoromóidí simplí ar nós $x + 2y = 4$ atá i gceist, ach cothromóidí níos casta chomh maith, mar shampla $x^2 + y^3 = 3$. Más féidir linn pictiúr a tharraingt de na pointí a shásaíonn an comthoromóid seo agus a fháil amach cén sórt cosúlacht atá i gceist (cégo bhfuil a tasc sin deacair go leor), beidh tuiscint radharcach againn ar an gcothromóid sin chomh maith le tuiscint ailgéabrach.

Ins a chúrsa seo, beidh an plána úsáid dúinn go príomha chun graif de feidhmeanna éagsúla a shamhlú agus a tharraingt. Tugfaidh sé seo tuiscint radharcach dúinn ar na feidhmeanna atá á phlé againn. Ar dtús ní foláir cur síos soiléir a bheith againn ar an bhrí a bhaineann leis an dtéarma *graf*.

Sainmhíniú 1.2.1. *Más feidhm í* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tugtar* graf f *ar an fothacar*

$$\{(x, y) : y = f(x)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. *Ansin, is fothacar é an graf den phlána, agus cuimsíonn sé na pointí* (x, y) *ionas gur é an* Y-*chomhordanáid íomhá an* X-*chomohordanáid faoin fheidhm* f.

Is sainmhímiú teicniciúil go leor é sin, ach is féidir linn an graf a shamhlú mar phictiúr den fheidhm, a léiríonn iompar na feidme nuair atá an athróg x ag gluaiseacht ar fud an uimhirlíne.

Sampla 1.2.2. *Tá* f *sainmhínithe leis an fhoirmle* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Tarraing pictiúir de graf* f.

Réiteach agus Trácht: Is féidir cuimhniú ar na phointí th'ios.

1. Cuimsíonn fearann na feidhme seo na réaduimhreacha go léir *ach amháin 0*. Níl aon ciall ag baint leis an ráiteas $\frac{1}{x}$ nuair atá $x = 0$. Ansin, ní féidir an fheidhm a luacháil ag $x = 0$ agus ní aon pointe ins an ghraf le 0 mar X-chomhordanáid.

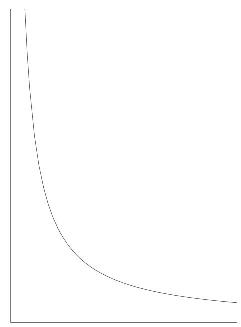
2. Tá $\frac{1}{x}$ deimhneach nuair atá x deimhneach, agus tá $\frac{1}{x}$ diúltach nuair atá x diúltach. Ansin, tá an graf cuimsithe ins an chéad agus an triú ceathramhán den phlána (thuas ar dheis agus thíos ar chlé).

3. Nuair atá x deimhneach agus mór (mar shampla $x > 1000$, tá $\frac{1}{x}$ deimhneach agus tá sé go han-beag. Nuair a théann x thar an uimhirlíne ins an dtreo deimhneach, tá $\frac{1}{x}$ ag laghdú agus ag druidim le 0, tá graf na feidhme seo an-ghar leis an X-ais anseo, ach ní teagmhaíonn sé leis an X-ais riamh.

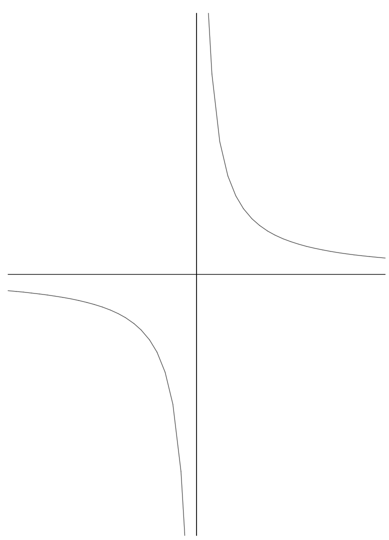
   Nuair atá x deimhneach ach an-bheag, tá $f(x)$ deimhneach agus an-mhór. Mar shampla tá $f(0.01) = 100$ agus $f(0.001) = 1000$ agus mar sin de. Ansin, nuair atá x deimhneach ach an-ghar le 0, tá graf f an-ghar leis an Y-ais ach ní teagmhaíonn sé leis riamh.

   Dá bhrí sin, nuair atá x deimhneach agus ag seoladh amach ó 0 ins an treo deimhneach, tá $f(x)$ an-mhór ar dtús ach ag laghdú go tapaidh, tá $f(1) = \frac{1}{1} = 1$, agus an sin leanann $f(x)$ ar aghaidh ag laghdú agus ag laghdú, ach ní schroicheann sé 0.

   Tá graf an scéal seo léirithe thíos.



4. Ar an taobh eile, is cosúil é an scéal, ach caithfear smaoineamh go bhfuil $f(x)$ diúltach nuair atá x diúltach. Tá pictiúr den ghraf iomlán thíos.

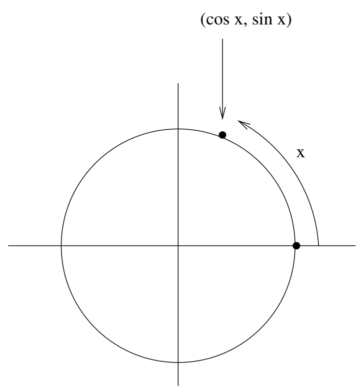


Na Feidhmeanna Triantánúla

Tugtar an *aonadciorcal* ar an ciorcal i $\mathbb{R}^2$ le lár ag $(0,0)$ agus le ga 1. Ansin, is é $x^2 + y^2 = 1$ cothromóid an aonadciorcal; cuimsíonn sé na pointí go léir a shásaíonn an cothromóid sin. Ní le triantáin i ndáiríre a baineann na feidhmeanna triantánúla ach le comhardanáidí ar an aonadciorcal. Tá na sainmhínithe seo a leanas go han-tábhachtach dúinn, agus is fiú tamall a chaitheamh chun tuiscint a fhorbairt orthu.

Sainmhíniú 1.2.3. *Abair gur réaduimhir deimhneach é x. Tosaigh ag an bpointe $(1,0)$ ag taisteal timpeall an aonadciorcal i dtreo tuathalach. Stop tar éis taisteal ar feadh achar x timpeall an ciorcal. Anois tá tú fós ag pointe ar an gciorcal. Tugtar $\cos x$ (sin comhshíneas x) ar X-comhardanáid an pointe seo, agus tugtar $\sin x$ (sin síneas x) ar a Y-chomordanáid.*

Má tá x diúltach, sainmhínítear $\cos x$ agus $\sin x$ mar an gcéanna, ach amháin go bhfuilimid ag taisteal ó $(1,0)$ ins an dtreo deiseal.



Sampla 1.2.4. 1. *Chun $\cos 0$ a fháil amach níl le déanamh againn ach fanacht ag an bpointe $(1,0)$ agus féachaint ar an X-comhordanáid, sin 1. Ansin,*

$$\cos(0) = 1.$$

2. *Is 2π é imlíne an aonadciorcal. Mar sin, tar éis taisteail a feadh achar 2π timpeall an aonadciorcal, táimid ar ais ag an pointe $(1,0)$ agus is féidir linn a rá*

$$\cos 2\pi = 1.$$

3. *Tar éis taisteal ar feadh achar π timpeall an aonadciorcal, táimíd ag an bpointe $(-1,0)$, ansin tá*

$$\cos \pi = -1.$$

CEISTEANNA DON LÉACHT

1. Céard é $\sin 0$?
2. Céard é $\sin 2\pi$?
3. Céard é $\sin \pi$?
4. Céard é $\cos \frac{\pi}{2}$?
5. Céard é $\sin \frac{\pi}{2}$?

NÓTA: Tá sé an-deacair na feidhmeanna cos agus sin a luacháil ag pointí áirithe, mar shampla $1, 2, 3$ srl. Níl foirmle nó córas againn chun luacháil mar seo a dhéanamh, ach is féidir linn an bhrí a bhaineann le $\sin 1$, $\cos 2$ srl a thuiscint ó de réir Sainmhíiú 1.2.3.

Céard faoi graf na feidhme cos? Conas is féidir é a tharraingt agus cén cruth atá air? Is féidir linn cúpla pointí a thabhairt faoi deara.

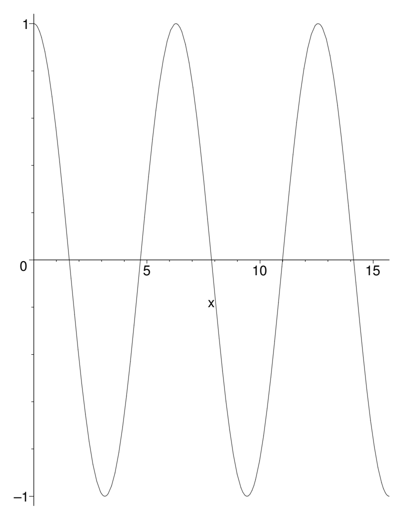
1. Is an uimhirlíne iomlán é fearann na feidhme cos. Is féidir $\cos x$ a shainmhíniú do *gach* réaduimhir x. Ansin, nílimíd ag súil le "bearnaí" ins an ngraf.

2. Tá na luachanna de $\cos x$ go léir idir -1 agus 1, mar is comhordanáidí iad do phointí atá ar an aonadciorcal. Mar sin, beidh an graf go léir cuimsithe idir an líne $y = -1$ agus an líne $y = 1$. Is féidir linn a fheiceáil go bhfuil luachanna deimhneacha agus diúltacha ag $\cos x$, mar tá pointí ar an aonadciorcal le X-comhordanáidí deimhneacha agus diúltacha.

3. Má táimid ag pointe ar bith P ar an aonadciorcal, beimid ar ais ag P tar éis taisteal de achar 2π sa treo tuathalach (no deiseal). Ansin, tá sé soiléir go bhfuil $cos 1 = \cos(1 + 2\pi)$, go bhfuil $\cos 2 = \cos(2 + 2\pi)$, agus go ghinearáta go bhfuil $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ do réaduimhir ar bith x.

   Deirtear go bhfuil an fheidhm cos periadach le periad 2π

Chun a graf a tharraingt ansin, is féidir linn tosnú ag $x = 0$. Chun $\cos 0$ a luacháil, ní foláir X-chomhordanáid an phointe $(1, 0)$ a scríobh : sin 1. Nuair atá x ag méadú ó 0 go $\frac{\pi}{2}$, táimid ag gluaiseacht timpeall an aonadciorcal sa treo tuathalach, agus tá ár X-chomhordanáid ag laghdú ó 1 go 0. Nuair a leanaimid ar aghaidh thar $\frac{\pi}{2}$, tá an X-chomhordanáid diúltach agus tá sé ag laghdú fós. Nuair a schroichimid π feicimid go bhfuil $\cos \pi = -1$, agus ansin tosaíonn $\cos x$ ag méadú arís. Leanann sé ar aghaidh ag méadú ansin, tá $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ agus nuair a fillimid go $(1, 0)$, tá turas de achar 2π déanta againn, táimíd ar ais ag an tosach agus feicimid go bhfuil $\cos 2\pi = 1$ arís. Is féidir linn an eolas go léir a chur ins an graf thíos.



CEIST (DEACAIR) DON LÉACHT: Tarraing graf de $\sin x$. If féidir an stráitéis cúramach céanna a úsáid.